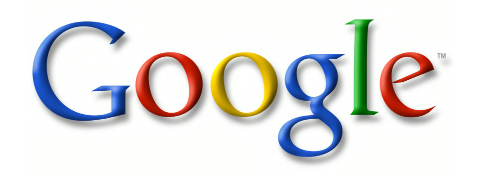
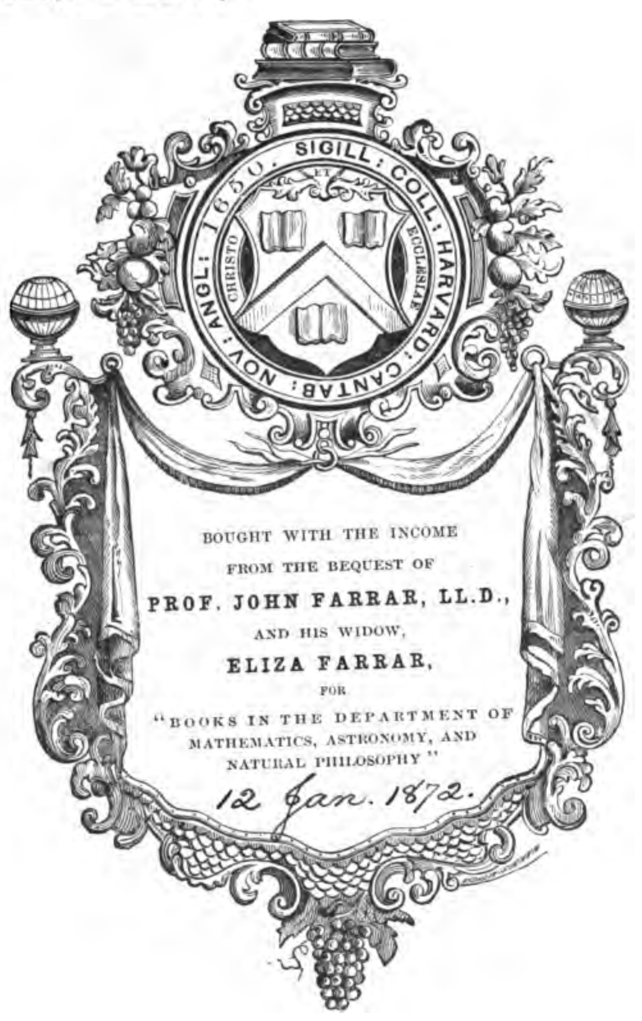



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



Abriss einer Theorie

der

complexen Functionen

und der

Thetafunctionen

einer Veränderlichen

von

Dr. J. Thomae,
Docent in Halle.

Mit 16 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Halle 1870.
Verlag von Louis Nebert.

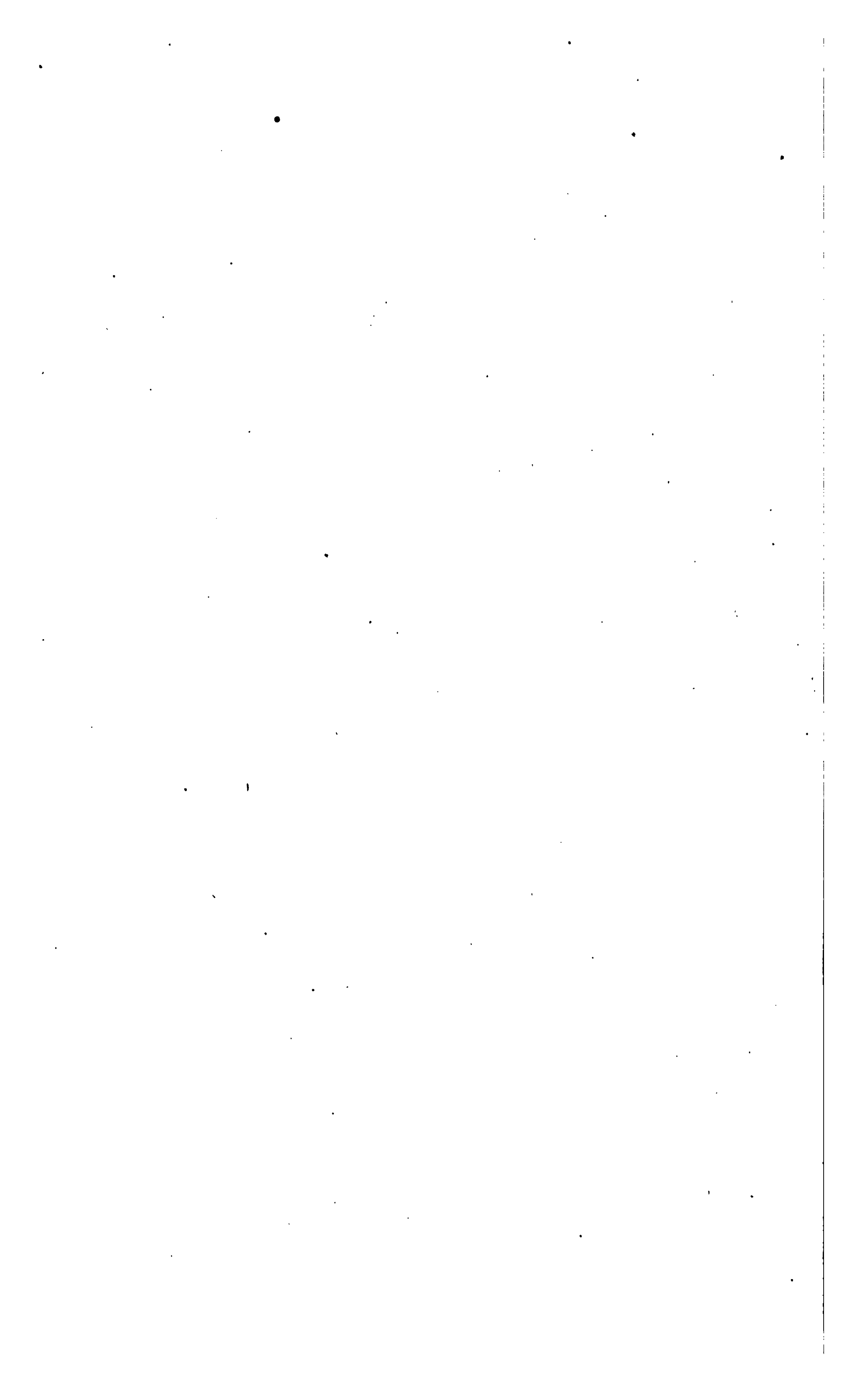
Vorwort.

Dieser Abriss soll eine kurze Uebersicht über die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunctionen einer Veränderlichen und ihrer wichtigsten Darstellungen denen in die Hand geben, welche eine grössere Vorlesung über elliptische Functionen hören. Hierzu ist eine gewisse Kenntniss der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen unentbehrlich, welche deshalb der Theorie der Thetafunctionen voraufgeschickt wird. Es bedarf vielleicht der Entschuldigung, dass darin unter der Bezeichnung „norm" nicht das verstanden ist, was Gauss zuerst darunter verstanden hat, sondern die positive Quadratwurzel desselben, wie es auch in der deutschen Behandlung von „Briot und Bouquet, Doppelt-periodische Functionen" durch Herrn Fischer geschehen ist. Ich habe diese Bezeichnung gewählt, weil das Wort „modul" in so vielfacher Bedeutung bei den elliptischen Functionen, bei den Thetafunctionen und bei den Congruenzen vorkommt, und die Bezeichnung „absoluter Betrag" nicht so kurz ist.

Es dürfte vielleicht gerathen sein, bei einem ersten Studium das, was über die Fourier'sche Reihe von pag. 28—52 gesagt ist, als zu schwierig fortzulassen, was um so mehr angeht, als im zweiten Theile die Entwicklungen in trigonometrische Reihen mit elementaren Mitteln ausgeführt sind.

Halle im April 1870.

J. Thomae.



Inhaltsverzeichniss.

Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen.

Nach dem Druck bemerkte Irrthümer.

pag. 9 Zeile 10 v. o. lies $\sum\limits_0^n$ st. $\sum\limits_0^\infty$.

„ 10 Z. 2 v. o. lies $\int_{\lambda_2}^{l}$ st. $\int_{\lambda_2}^{x'}$.

„ 14 Z. 16 v. u. lies 2 st. z.

„ 18 Z. 14 v. o. hinter „ist daher“ ergänze: das Integral.

„ 26 Z. 20 v. o. lies $x - a$ st. $x - 0$.

„ 28 Z. 4 v. o. lies und es st. so.

„ 54 Z. 11 v. o. im Nenner unter dem Zeichen $\int_s$ lies $\xi - x$ st. $x - \xi$.

„ 65 Z. 14 v. o. lies $\pm\frac{1}{k}$ st. $\frac{1}{k}$:

„ 92 Z. 9 v. o. lies $\vartheta_{h'g'}(u - v)$ st. $\vartheta_{h'g}(u - v)$.

„ 99 Z. 7 v. u. lies Zähler st. Nenner.

„ 107 Z. 11 v. o. ergänze $d\xi$ hinter dem ersten Integralzeichen.

„ 111 Z. 3 v. o. lies $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3$ st. $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^3$.

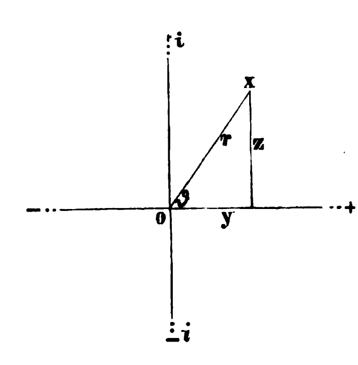
„ 116 Z. 3 v. u. lies $\nu(x) . e^{-\int_0^x dx \int_0^x k^2\lambda^2(x)\,dx}$ st. $e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}$

„ 124 Z. 1 v. u. lies $\lambda(x + \frac{1}{2}\omega')$ st. $\lambda(x + \frac{1}{2}\omega)$.

„ 144 Z. 2 u. 3 v. u. lies $e^{-ai\pi}$ st. $e^{ai\pi}$.

Theorie der complexen Functionen.

Die complexen Zahlen, d. h. die Zahlen x von der Form $y + zi$, worin $i = \sqrt{-1}$ ist, bilden ein stetiges Grössengebiet von zwei Ausdehnungen. Ebenso bilden die Puncte einer Ebene ein stetiges Grössengebiet von zwei Ausdehnungen. Man ist deshalb im Stande, mit Gauss die complexen Zahlen auf die Puncte einer Ebene — wie jeder andern zweifachen stetigen Mannigfaltigkeit — zu beziehen, so dass jeder Punct der Ebene als Träger einer complexen Zahl angesehen wird. Die Beziehung der Zahlen und Puncte aufeinander wird einfach dadurch hergestellt, dass man den durch die rechtwinkligen Coordinaten y (Abscisse) und z (Ordinate) bestimmten Punct zum Träger der complexen Zahl $x = y + zi$ macht.



Nennt man die Strecke oder den Radiusvector r vom Anfangspunct der Coordinaten nach dem Träger der Zahl x — durch dieselbe Einheit als die Coordinaten y, z gemessen — den absoluten Betrag, oder die Norm von x [$r = \text{norm}(x)$] und den Winkel ϑ, den dieser Radiusvector mit der positiven y-Achse macht, den Winkel der Zahl, so kann

ebenso, wie der Träger der Zahl x durch die Polarcoordinaten r und ϑ, die Zahl x selbst durch ihre Norm und ihren Winkel bestimmt werden. Da nämlich

$$y = r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta$$

ist, so folgt:

$$x = y + zi = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = r.e^{\vartheta i}.$$

Umgekehrt drücken sich auch Norm und Winkel leicht durch den reellen und imaginären Bestandtheil der Zahl x, also durch y und z aus. Es ist nämlich

$$\operatorname{norm}(x) = r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y},$$

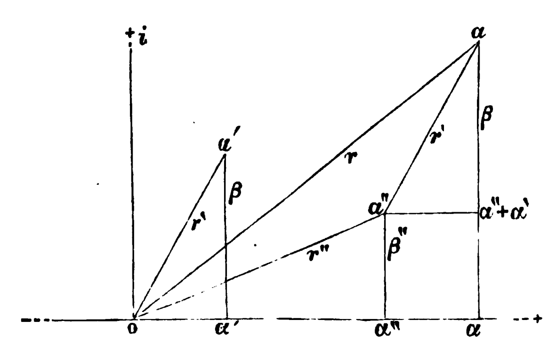
worin das Wurzelzeichen stets positiv zu nehmen, der Winkel aber in dem Quadranten zu nehmen ist, in welchem die Zahl x liegt.

Wir erinnern an dieser Stelle an die bekannten Sätze, dass das Produkt zweier complexen Zahlen das Produkt ihrer Normen zur Norm, die Summe ihrer Winkel zum Winkel hat, und dass der Quotient zweier Zahlen den Quotienten der Normen zur Norm, die Differenz der Winkel zum Winkel hat, welche Sätze aus der Gleichung $x = re^{\vartheta i}$ unmittelbar folgen.

Ferner an den Satz: Ist $a = \alpha + \beta i$ die Summe zweier complexen Zahlen $a' = \alpha' + \beta' i$, $a'' = \alpha'' + \beta'' i$, so ist stets

$$\operatorname{norm}(a) \leqq \operatorname{norm}(a') + \operatorname{norm}(a'').$$

Stellt man sich nämlich die Zahlen a, a', a'' graphisch dar, wie dies in nachstehender Figur geschieht, und zieht von a'' eine

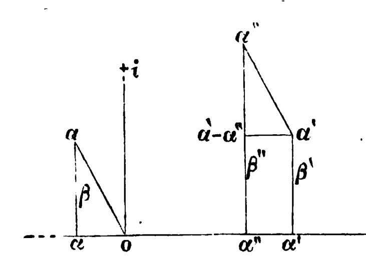


Parallele zur y-Achse bis zum Träger der Zahl $a'' + \alpha'$, so sind $(a', a'' + \alpha', a)$ und (o, α', a') congruente Dreiecke, und demnach die Strecke $a''a = oa'$ gleich $\operatorname{norm}(a') = r'$. Ferner ist

$oa'' = \text{norm}(a'') = r''$, $oa = \text{norm}(a) = r$. Also bilden r, r', r'' ein Dreieck, und da immer zwei Seiten zusammen grösser als die dritte sind, so ist $\text{norm}(a) < \text{norm}(a') + \text{norm}(a'')$, wenn nicht a' und a'' gleiche Winkel (in gleichen Quadranten) haben, in welchem Falle $\text{norm}(a) = \text{norm}(a') + \text{norm}(a'')$ ist.

Die Differenz a zweier complexen Zahlen a' und a'' hat die Strecke zwischen den Trägern der beiden Zahlen zur Norm, und den Winkel, welchen diese vom Subtrahendus zum Minuendus hin gerichtete Strecke mit der positiven y-Achse macht, zum Winkel.

Stellt man nämlich die Zahlen $a' = \alpha' + \beta'$; $a'' = \alpha'' + \beta''$; und deren Differenz $a'' - a' = a = \alpha + \beta i$ graphisch dar, so sind die Dreiecke (a', $a' - \alpha''$, a'') und (o, α, a) congruent, und demnach $\text{norm}(a) = r = (a', a'')$, und es ist ($o$, a) in gleichem Sinne parallel (a', a''), also der Winkel, den die Zahl a besitzt, derselbe als der, welchen die Strecke (a', a'') mit der positiven y-Achse macht.



Die hier angewandte Repräsentation der complexen Zahlen durch die Puncte einer Ebene gewährt manche Bequemlichkeiten, namentlich bei Bestimmung von Zahlengebieten und für die Terminologie. So ist eine stetige einfach ausgedehnte Zahlenreihe durch eine irgendwie gegebene Curve, deren Puncte die Träger der Zahlen sind, ausreichend bestimmt. Oder, es wird durch ein aus der Ebene ausgeschnittenes Stück ein zweifach ausgedehntes, begrenztes Zahlengebiet genau definirt. Z. B. durch einen um den Anfangspunct der Coordinaten mit dem Radius a geschlagenen Kreis wird ein Zahlengebiet abgegrenzt, welches analytisch durch die Bedingung $\text{norm}(x) < a$ gegeben ist. Es ist wichtig, solche aus der Ebene geschnittene Stücke in Bezug auf die Ordnung ihres Zusammenhanges zu charakterisiren, was nach Riemann geschieht.

Zusammenhangend heissen aus einer Ebene geschnittene Theile, wenn sie ein Stück bilden, so dass man von jedem

Puncte darin zu jedem anderen gelangen kann, ohne die Begrenzung zu überschreiten.

Einfach zusammenhangend heisst ein zusammenhangendes Stück der Ebene, wenn es durch jeden Querschnitt, d. h. eine zwei Puncte der Begrenzung verbindende oder in sich zurücklaufende Linie, in getrennte nicht zusammenhangende Stücke zerlegt wird.

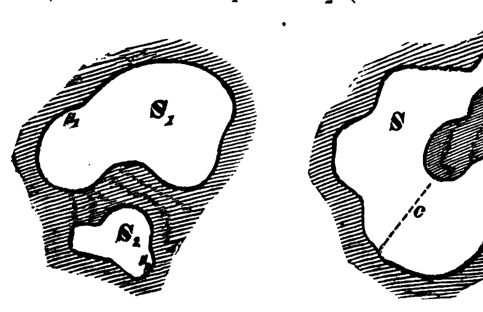
Zweifach zusammenhangend heisst ein zusammenhangendes Stück der Ebene, wenn es durch einen Querschnitt in ein einfach zusammenhangendes Stück zerlegt werden kann.

In mehrfach zusammenhangenden Stücken sind mehr nicht zerstückende Querschnitte möglich.

Einfach zusammenhangend ist z. B. die Fläche einer Ellipse, zweifach zusammenhangend das ringförmige Stück zwischen zwei concentrischen Kreisen. Verbindet man die beiden Kreise durch eine Gerade, und rechnet die beiden Ufer derselben der Begrenzung hinzu, so ist das Stück einfach zusammenhangend.

Die Begrenzung eines einfach zusammenhangenden Stückes besteht aus einem einzigen continuirlichen Zuge.

Bestände sie nämlich aus getrennten Zügen, wie in S aus a und b, oder wie in S_1 und S_2 (wenn man diese als etwas



Zusammengehöriges ansieht) aus s_1 und s_2, so ist entweder eine in den begrenzten Theilen verlaufende Verbindungslinie dieser Begrenzungen nicht möglich, wie in (S_1, S_2), dann ist nach der Definition des Zusammenhangens das Stück überhaupt nicht zusammenhangend, oder eine solche Linie ist möglich, wie in S die punctirte Linie c. Dann zerstückt aber die Linie c das Ebenenstück S nicht, und dieses ist zweifach zusammenhangend. Um dies zu beweisen ist nur nöthig zu zeigen, dass, wenn eine

Verbindungslinie zweier Puncte durch die Linie c in getrennte Stücke zerlegt wird, dadurch die Verbindung dieser Puncte nicht überhaupt zerstört ist. Nun führen aber die beiden Stücke auf die verschiedenen Ufer der Linie c. Die Verbindung der beiden Ufer ist dadurch noch hergestellt, dass die Linie a oder b von einem Ufer derselben auf das andere führt, also auch eine a oder b sehr nahe laufende, die nun nicht blos Begrenzung von S ist, sondern ganz darin liegt.

Jede Function von y und z kann als Function der complexen Variabeln x, oder, wie man sagt, der x-Ebene angesehen werden, weil durch Angabe der complexen Zahl $x = y + zi$ die beiden reellen Grössen y und z vollkommen bestimmt sind. *Allein wir nennen eine complexe Function von x oder eine Function der complexen Variabeln x eine Function ω von y und z nur in einem solchen Gebiete, in welchem sie der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{i . \partial\omega(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial\omega(y, z)}{\partial z}$$

Genüge leistet, wovon nur in einzelnen Puncten und Linien Ausnahmen stattfinden dürfen. Aber es muss diese Differentialgleichung bestehen bleiben, wie nahe auch der Punct y, z an die ausgeschlossenen Stellen gerückt wird, oder die Ausnahmen dürfen in keinem noch so kleinen Flächentheile stattfinden. Ausserdem wird stets vorausgesetzt, dass eine complexe Function von x keine durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Puncten hebbare Unstetigkeiten besitzt, wie z. B. wenn sie für alle Werthe von x den Werth 1, für $x = 0$ aber den Werth 0 hätte, *und dass sie keine durch Abänderung ihrer Werthe längs einzelner Linien hebbare Unstetigkeiten besitzt*, wie z. B. wenn sie überall den Werth 0, längs der Strecke der reellen Achse von 1 bis 2 aber den Werth 3 hätte. Hingegen ist nicht ausgeschlossen, dass sie durch Annäherung der Variabeln y, z an einzelne Puncte in verschiedene Richtungen verschiedene Werthe erhalte, wie $e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle $x = 0$.

Setzen wir in einer solchen complexen Function $y = x - zi$, und differenziren dann nach z, so haben wir

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\omega}{\partial y} . (-i) + \frac{\partial\omega}{\partial z}, \text{ also } \frac{d\omega}{dz} = 0,$$

d. h. es ist ω ganz unabhängig von z und enthält nur die Grösse x. Diese Schlussweise ist jedoch nur so lange richtig, als ω eine Function von y und z ist, die auch dann einen Differentialquotienten besitzt, wenn als Zuwachs der Variabeln imaginäre Grössen zugelassen werden, weil die Variabele $y = x - zi$ einen imaginären Zuwachs erfährt, wenn z um etwas Reelles geändert wird. Dies wird in der Differentialrechnung nur für die durch convergente Potenzreihen dargestellten Functionen bewiesen, und kann daher nicht auf Functionen ausgedehnt werden, von denen eine solche Darstellbarkeit nicht vorausgesetzt ist. Die allgemeine Giltigkeit des Satzes folgt jedoch aus den fundamentalen Sätzen der Theorie der complexen Functionen, die den Gegenstand dieser Einleitung bilden.

Wird eine Function $\omega(x)$ der complexen Variabeln x durch eine Substitution $x = \varphi(\xi)$ transformirt, und ist $\varphi(\xi)$ eine Function der complexen Variabeln ξ, so ist auch $\omega(\varphi(\xi))$ eine Function der complexen Variabeln ξ. *Das Wesen einer complexen Function kann so gefasst werden, dass sie überall, einzelne Linien und Puncte ausgenommen, ein Differential besitzt, welches dem complexen Zuwachs dx, dessen Norm verschwindend klein, dessen Winkel aber beliebig ist, proportional ist, oder dass sie einen von diesem Zuwachs unabhängigen Differentialquotienten besitzt.* In der That findet dies dann, und nur dann statt, wenn in

$$d\omega(y, z) = \omega(y + dy, z + dz) - \omega(y, z) = \frac{\partial\omega}{\partial y} dy + \frac{\partial\omega}{\partial z} dz,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{i\partial z} \text{ ist, in welchem Falle}$$

$$d\omega(y, z) = \frac{\partial\omega}{\partial y}(dy + i\,dz) = \frac{\partial\omega}{\partial y} dx = \frac{\partial\omega}{\partial iz} dx$$

ist, so dass man für $\dfrac{\omega(x + dx) - \omega(x)}{dx}$ einen von dx unabhängigen Werth $\dfrac{d\omega(x)}{dx} = \omega'(x)$ erhält. Nun ist aber $d\omega(\varphi(\xi)) = \omega(\varphi(\xi + d\xi)) - \omega(\varphi(\xi))$ und $\varphi(\xi + d\xi)$ nach der Voraussetzung gleich $\varphi(\xi) + \varphi'(\xi)d\xi$, also $d\omega(\varphi(\xi)) = \omega(x + \varphi'(\xi)d\xi) - \omega(x)$, und da nach der Voraussetzung $\omega(x + \alpha + \beta i) - \omega(x) = \omega'(x).(\alpha + \beta i)$ ist, wenn norm $(\alpha + \beta i)$ verschwindend klein ist, so ist $d\omega(\varphi(\xi)) = \omega'(x).\varphi'(\xi)d\xi$, also das Differential proportional $d\xi$.

Durch eine solche Substitution $x = \varphi(\xi)$ werden die Puncte der x-Ebene in eine Beziehung gesetzt zu den Puncten der ξ-Ebene (welche ein- oder mehrdeutig sein kann). Einer Linie in der x-Ebene entspricht eine Linie in der ξ-Ebene, man kann deshalb die ξ-Ebene eine Abbildung der x-Ebene nennen. Diese Abbildung besitzt die von Gauss zuerst gefundene Eigenthümlichkeit, dass sehr kleine entsprechende Figuren einander ähnlich sind, weshalb man sie eine conforme oder in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung nennt. In der That, sind die Endpuncte zweier sehr kleinen von ξ ausgehenden Strecken $\xi + dre^{\varphi i}$ und $\xi + dr_1 e^{\vartheta i}$, so sind die Endpuncte der entsprechenden von x, ausgehenden Strecken $x + \varphi'(\xi).dr e^{\varphi i}$, $x + \varphi'(\xi) dr_1 e^{\vartheta i}$ und wenn $(\varphi'(\xi)) = Re^{\Theta i}$ gesetzt wird, wird das Verhältniss der Strecken in der x-Ebene $Rdr : Rdr_1 = dr : dr_1$, also gleich dem der entsprechenden Strecken in der ξ-Ebene, und der Winkel, den beide einschliessen, $\Theta + \varphi - (\Theta + \vartheta) = \varphi - \vartheta$, also gleich dem, welchen die entsprechenden Strecken in der ξ-Ebene einschliessen. Also sind die einander entsprechenden sehr kleinen Strecken proportional, die eingeschlossenen Winkel gleich, ausgenommen in den Puncten und Linien, in welchen $\varphi(\xi)$ keinen endlichen oder von $d\xi$ unabhängigen Differentialquotienten hat.

Einfache häufig vorkommende Substitutionen sind

$$x - a = \xi,$$

welche als eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems (y, z) angesehen werden kann;

$$x = e^{\varphi i}.\xi,$$

welche eine Drehung des Coordinatensystems um den Winkel φ bewirkt;

$$x = \frac{1}{\xi - a},$$

durch welche die Stelle $x = \infty$ auf den Punct $\xi = a$ bezogen ist.

Es bedeute nun im Folgenden, wie wir zur Abkürzung ein- für allemal feststellen, $f(x)$ eine für irgend ein Gebiet eindeutig bestimmte Function der complexen Variabeln x, die stetig und endlich ist, ausgenommen in einzelnen Puncten $u, u', u'', \ldots$, wo sie so unendlich oder auch nur unstetig wird, dass

$$f(x)\,(x-u)\,(x-u')\,(x-u'')\ldots$$

für $x = u, u', u'', \ldots$ verschwindet, und ausgenommen in einzelnen Linien, in denen sie der Differentialgleichung $i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$ zwar nicht Genüge leistet, aber stetig sein soll.

Ferner bedeute S ein einfach zusammenhängendes Stück der x-Ebene und s die Begrenzung desselben.

Die Begrenzung eines Stückes „S", welches eine Unstetigkeitsstelle (d. h. eine Stelle, für welche eine in S definirte Function unstetig wird) enthält, deren Gestalt nur der Bedingung unterworfen ist, ausser dieser Unstetigkeitsstelle keine andere einzuschliessen, nennen wir mit Herrn Kronecker die natürliche Begrenzung der Unstetigkeitsstelle.

I. Unter dem Integral einer Function $\omega(x)$ über eine Linie l' zwischen x_0 und x' erstreckt, wenn $\omega(x)$ längs dieser Linie endlich und nur in einzelnen Puncten unstetig ist, verstehen wir den Grenzwerth, gegen welchen die rechte Seite der Gleichung

$$\int \omega(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n}{}_{(\mu)} \omega\,(x_\mu + \varepsilon_\mu \Delta x_\mu).\Delta x_\mu$$

convergirt, wenn

$$\Delta x_\mu = x_{\mu+1} - x_\mu, \quad \Delta x_n = x' - x_n$$

ist, und $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\mu \ldots x'$ aufeinanderfolgende Puncte der Linie l' (oder vielmehr die Zahlen, deren Träger diese Puncte sind) bedeuten, und $x_\mu + \varepsilon_\mu \Delta x_\mu$ ein beliebiger zwischen $x_{\mu+1}$ und x_μ auf l' liegender Punct ist, und wenn die Δx sämmtlich mit wachsenden n unendlich klein werden. Die durch die Reihenfolge der Puncte $x_0\, x_1 \ldots x'$ bestimmte Richtung nennt man dabei die Richtung oder den Sinn der Integration.

Ist die vorgegebene Linie l' ein Stück der y-Achse, so stimmt diese Definition mit der gemeinen des bestimmten Integrals überein.

Für den allgemeinen Fall bezeichnen wir die Länge der Linie l' von x_0 bis zu einem unbestimmten Puncte derselben mit l, bis zu x_μ mit l_μ, bis zu $x_\mu + \varepsilon_\mu \Delta x_\mu$ mit $l_\mu + \eta_\mu \Delta l_\mu$, $l_{\mu+1} - l_\mu$ mit Δl_μ, und den Winkel, den l' an der Stelle l oder l_μ mit der y-Achse macht, bezüglich mit φ oder φ_μ, also Δx_μ mit $(\cos \varphi_\mu + i \sin \varphi_\mu)\Delta l_\mu$. Dann ist offenbar sowohl der

reelle Theil von $\omega(x_\mu + \varepsilon_\mu \Delta x_\mu)(\cos\varphi_\mu + i\sin\varphi_\mu)$ als auch der imaginäre Theil eine Grösse, die nur von $l_\mu + \eta_\mu \Delta l_\mu$ abhängt, so dass der Ausdruck gleich

$$\Phi(l_\mu + \eta_\mu \Delta l_\mu) + i\Psi(l_\mu + \eta_\mu \Delta l_\mu)$$

gesetzt werden kann, und es sind offenbar $\Phi(l)$ und $\Psi(l)$ unter den gemachten Voraussetzungen nur in einzelnen Puncten unstetige Functionen, wenn nicht l' unendlich viele Ecken hat, was wir hier ausschliessen. In dieser Bezeichnung ist nun

$$\int \omega(x)\,dx =$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{0}^{\infty}{}_{(\mu)} \Phi(l_\mu + \eta_\mu \Delta l_\mu)\Delta l_\mu + i \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{\infty}{}_{(\mu)} \Psi(l_\mu + \eta_\mu \Delta l_\mu)\Delta l_\mu$$

$$= \int_0^{l'} \Phi(l)\,dl + i\int_0^{l'} \Psi(l)\,dl,$$

worin die letzten Integrale die Bedeutung gemeiner Integrale mit reellen Integrationsvariablen haben.

Da nun diese unter den gemachten Voraussetzungen gegen einen endlichen Grenzwerth convergiren, so convergirt auch unser Integral mit complexen Integrationsvariabeln gegen einen e n d l i c h e n im Allgemeinen complexen Werth.

I[a]. *Wenn $\omega(x)$ im Puncte u der Linie l' unendlich wird, so versteht man unter dem Integral $\int \omega(x)\,dx$ über die Linie l' erstreckt den Grenzwerth, welchem sich die Summe zweier Integrale nähert, von denen das eine über den Theil von l' zwischen x_0 und einem Puncte u_1 vor u auf l', und das andere über den Theil zwischen u_2 hinter u auf l' bis zu x' erstreckt wird, wenn u_1 und u_2 dem Puncte u längs l beliebig genähert werden.*

Zusatz. *Das Integral erlangt aber dann einen bestimmten Grenzwerth, wenn $(u_1 - u)^{1-\varepsilon_1}\omega(u_1)$ und $(u_2 - u)^{1-\varepsilon_2}\omega(u_2)$ durch Annäherung der Puncte u_1, u_2 an u beliebig klein gemacht werden können, wenn ε_1, ε_2 beliebig kleine, aber angebbare positive Zahlen bedeuten. Im andern Falle besitzt das Integral im Allgemeinen keinen bestimmten Werth.*

Entspricht dem Punkte u die Länge λ auf l, den Puncten u_1, u_2 bez. λ_1, λ_2, so sieht man leicht ein, dass auch $(\lambda_1 - \lambda)^{1-\varepsilon_1}\Phi(\lambda_1)$, $(\lambda_1 - \lambda)^{1-\varepsilon_1}\Psi(\lambda_1)$, und $(\lambda_2 - \lambda)^{1-\varepsilon_2}\Phi(\lambda_2)$, $(\lambda_2 - \lambda)^{1-\varepsilon_2}\Psi(\lambda_2)$ durch Annäherung von λ_1, λ_2 an λ beliebig klein gemacht werden können. Da nun nach I[a]. und I.

$$\int \omega(x)\,dx = \lim_{\lambda_1=\lambda}\left(\int_0^{\lambda_1} \Phi(l)\,dl + i\int_0^{\lambda_1} \Psi(\lambda)\,dl\right) + \lim_{\lambda_2=\lambda}\left(\int_{\lambda_2}^{x'} \Phi(l)\,dl + i\int_{\lambda_2}^{x'} \Psi(l)\,dl\right)$$

ist, so folgt der Zusatz aus den bekannten entsprechenden Sätzen über Integrale mit reellen Veränderlichen.

I^b. *Wenn die Linie l' ins Unendliche verläuft, so versteht man unter dem Integral $\int\omega(x)\,dx$ über l' erstreckt den Grenzwerth, welchem sich das Integral über den Theil der Linie von x_0 bis zu einem Puncte l nähert, wenn man l auf l' zur Grenze unendlich übergehen lässt.*

Aus der Gleichung $\int\omega(x)\,dx = \int_0^\infty \Phi(l)\,dl + i\int_0^\infty \Psi(l)\,dl$ folgert man den Zusatz:

Es nähert sich das Integral dann einem bestimmten Werthe als Grenze, wenn $x^{1+\varepsilon}.f(x)$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dass man x auf l' weit genug fortrückt, ε als positiv vorausgesetzt.

II. *Das Integral $\int\omega(x)\,dx$ über eine Linie ist gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Theile der Linie, wenn alle Integrationen in einer und derselben Richtung genommen werden.*

Das Integral $\int\omega(x)\,dx$ über eine Linie in einer Richtung erstreckt ist das Negative des Integrals über dieselbe Linie in entgegengesetzter Richtung erstreckt.

Beide Sätze sind unmittelbare Folgen der Definition des bestimmten Integrals.

III. **Satz von Cauchy.** *Das Integral $\int\omega(x)\,dx$ einer Function $\omega(x)$, welche im Innern*) und am Rande eines Stückes „S" den Charakter einer Function „$f(x)$" hat, über die ganze Begrenzung des Stückes „S" erstreckt, hat den Werth Null.*

Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Function $\omega(x)$ besitze im Innern von „S" nur einen Punct u, für welchen sie so unendlich oder unstetig wird, wie es dem Charakter einer Function $f(x)$ gemäss ist, und nur eine Linie l, längs welcher sie zwar stetig ist, aber der Differentialgleichung für complexe Functionen nicht genügt. Wir scheiden dann aus dem Stück S

---

*) Dem Innern wird hier immer nicht blos das Aeussere, sondern auch der Rand entgegengesetzt.

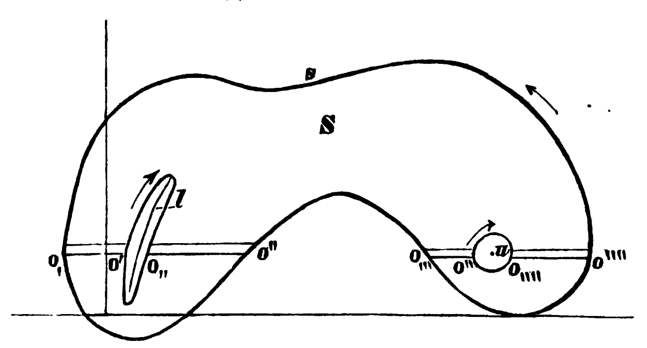
mittels der natürlichen Begrenzung dieser Stellen sehr kleine Flächenstücke aus und rechnen die äusseren Ufer der beiden natürlichen Begrenzungen der Begrenzung s des übrigbleibenden Stückes S' mit der Gesammtbezeichnung s' hinzu. Setzen wir hierauf $Y = -i\,\omega(x)$, $Z = \omega(x)$, so ist in S' überall die Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

und demnach auch das über alle Elemente $dy.dz$ des Stückes S' (im ganz gewöhnlichen Sinne eines Flächenintegrals) erstreckte Doppelintegral

$$\int\int\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dy.dz = 0.$$

Um das Integral $\int\int\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy.dz$ zu transformiren, zerlegen wir das Flächenstück S' durch ein System der y-Achse paralleler Linien in Elementarstreifen von der Breite dz. Der Beitrag eines unbestimmten dieser Flächenstreifen zu dem Werthe von $\int\int\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy.dz$ wird dann offenbar $dz\int\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy$, wenn die Integration über eine der y-Achse parallele Gerade erstreckt wird, welche dem Flächenstreifen angehört. Tritt nun (in der Richtung der wachsenden y) diese Linie bei $0_{,}$ in die Fläche S ein,



bei $0'$ aus derselben heraus (in unserer Figur in das um l ausgeschiedene Stück ein), bei $0_{,,}$ wieder ein, bei $0''$ aus u. s. w. bei $0_{,,,}$, $0'''$, ..., und sind die Werthe von Y dort bez. $Y_{,}$, Y', $Y_{,,}$ Y'', $Y_{,,,}$, Y''', ..., und bezeichnen wir mit $ds_{,}$, ds', $ds_{,,}$, ds'' etc. die Stücke der Begrenzung s', welche der betrachtete Elementarstreifen aus ihr herausschneidet, und die Winkel, welche diese

mit der y-Achse machen, mit $\varphi_{,}$, φ', $\varphi_{,,}$, φ'', ..., wobei immer die Richtung von s' zu nehmen ist, bei der das begrenzte Stück S' zur Linken bleibt, so liegen offenbar diese Winkel im dritten und vierten Quadranten bei $0_{,}$, $0_{,,}$, $0_{,,,}$, ..., im ersten und zweiten bei $0'$, $0''$, $0'''$, ..., so dass

$$dz = -\sin\varphi_{,}\,ds_{,} = -\sin\varphi_{,,}\,ds_{,,} = -\sin\varphi_{,,,}\,ds_{,,,} = \dots$$
$$= \sin\varphi'\,ds' = \sin\varphi''\,ds'' = \sin\varphi'''\,ds''' = \dots$$

Ferner ist
$$\int\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy = \begin{array}{l} Y' + Y'' + Y''' + \dots \\ - Y_{,} - Y_{,,} - Y_{,,,} - \dots \end{array}$$
und also
$$dz\int\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy = \sum Y\sin\varphi\,ds,$$
worin sich die Summation auf alle Begrenzungselemente bezieht, welche von dem betrachteten Elementarstreifen aus s' ausgeschnitten werden. Durch die Integration über sämmtliche Elementarstreifen wird offenbar das Integral $\int\int\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy\,dz$ erhalten, und die rechte Seite der erlangten Gleichung verwandelt sich in $\int Y\sin\varphi\,ds$, worin die Integration über die ganze Begrenzungslinie s zu erstrecken ist.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man
$$\int\int\frac{\partial Z}{\partial z}\,dz\,dy = -\int Z\cos\varphi\,ds$$
und folglich
$$\int\int\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)dy\,dz = -\int(Z\cos\varphi - Y\sin\varphi)\,ds = 0.$$
Und demnach endlich
$$\int(Z\cos\varphi - Y\sin\varphi)\,ds = \int\omega(x)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,ds$$
$$= \int\omega(x)\,dx = 0,$$
worin die Integration über s', also über die ganze Begrenzung s von S und in entgegengesetzter Richtung über die natürliche Begrenzung von u und l zu erstrecken ist.

Ueber die Gestalt der natürlichen Begrenzung von u und l sind keine Bestimmungen getroffen. Der Werth des Integrals $\int\omega(x)\,dx$ genommen über die Begrenzung s von S, welcher nach dem eben Bewiesenen gleich ist der Summe der Integrale über die natürlichen Begrenzungen von u und l in derselben Richtung genommen, ändert sich nicht, wie wir auch diese Begrenzungen gestalten mögen.

Um das Integral über die natürliche Begrenzung von u auszuwerthen, wählen wir für dieselbe einen Kreis, dessen Radius r beliebig klein genommen werden kann. Setzen wir $x - u = r . e^{\vartheta i}$, so ist ein Element dx der Peripherie $ire^{\vartheta i} d\vartheta$, und das Integral über die Peripherie

$$\int \omega(x)\, dx = i \int_0^{2\pi} r . \omega(u + re^{\vartheta i})\, e^{\vartheta i} d\vartheta,$$

welches verschwindet, weil r beliebig klein genommen werden kann und voraussetzungsmässig $r . \omega(u + re^{\vartheta i})$ mit r verschwindet. Also ist das Integral über die natürliche Begrenzung von u kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, also Null.

Ebenso ist das Integral über die natürliche Begrenzung der Linie l Null, weil diese Begrenzung beliebig nahe an die beiden Ufer von l gebracht werden kann, so dass die Integration über den beiden Ufern von l parallele Linien in entgegengesetzter Richtung zu erstrecken ist. Es liefern aber zwei gegenüber liegende parallele Begrenzungsstücke einen Beitrag von beliebiger Kleinheit, weil voraussetzungsmässig $\omega(x)$ längs l stetig ist.*) Also ist das Integral über die Begrenzung von S kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, w. z. b. w.

---

*) Damit das Integral $\int \omega(x)\, dx$ über die natürliche Begrenzung σ von l erstreckt seinem absoluten Betrage nach jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen kann, und gleichzeitig für die Begrenzung σ noch die Differentialgleichung $i \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial z}$ bestehe, (was zur Anwendbarkeit des Cauchy'schen Satzes nöthig ist,) ist nothwendig, dass eine Strecke δ, wie klein sie auch sein mag, angegeben werden kann, unter welche die Entfernung der Contour von der Linie l nicht herabzusinken braucht (einzelne Puncte etwa ausgenommen), damit die Differenzen der Werthe der Function ω für die Puncte auf σ und der Werthe für die nächstliegenden Puncte auf l ihrer Norm nach überall kleiner als eine bestimmte beliebig klein vorgegebene Zahl ε werden.

Herr E. Heine schlägt vor, eine Function $F(y, z)$, welche diese Bedingungen erfüllt, eine gleichmässig stetige zu nennen, während eine ungleichmässig stetige eine solche sein würde, bei welcher die Contour σ einige Male, oder auch unendlich oft der Linie l näher als jede noch so kleine vorgegebene Strecke δ gebracht werden müsste, damit die Differenzen der Werthe auf der Contour σ und für die entsprechenden Punkte von l ihrer Norm

Wenn ein Theil einer Linie l oder ein Punct u auf die Begrenzung s von S selbst fällt, so sind nur geringe Modifi-

---

nach kleiner seien, als eine bestimmte beliebig klein vorgegebene Zahl ε.

Ich behaupte nun, dass eine stetige Function einer oder zweier Variabeln niemals eine ungleichmässig stetige sein könne, ausser in unmittelbarer Nähe einer Unstetigkeitsstelle. Unter unmittelbarer Nähe aber verstehe ich eine Entfernung, die kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Strecke gemacht werden kann.

Die Functionen $\frac{1}{y}$ oder $\sin\frac{1}{y}$ sind von $y = 1$ bis $y = \alpha$, wenn α beliebig klein aber > 0 ist, stetige Functionen, allein es kann in diesem Gebiete keine Strecke (Intervall) δ so klein vorgegeben werden, dass $\frac{1}{y+\delta} - \frac{1}{y}$ oder $\sin\frac{1}{y+\delta} - \sin\frac{1}{y}$ durchgehend seinem absoluten Betrage nach kleiner als eine bestimmte vorgegebene kleine Zahl ε ist, wenn nicht α vorher bestimmt wird. Denn giebt man erst ε, dann δ vor, so kann man für y immer noch eine so kleine Zahl wählen, dass die absolut genommene Differenz $\frac{1}{y+\delta} - \frac{1}{y}$ grösser als ε ist. Hierzu ist nur nöthig, dass man $y < \frac{1}{\varepsilon\delta}$ nehme. Ganz ebenso kann in $\sin\frac{1}{y+\delta} - \sin\frac{1}{y}$ immer y so klein genommen werden, dass der absolute Betrag der Differenz grösser als ε ist, wofern nur $\varepsilon < \alpha$ ist. Gleichwohl kann in beiden Fällen, wenn y (> 0) vorgegeben ist, δ immer noch so bestimmt werden, dass diese Differenzen $\frac{1}{y+\delta} - \frac{1}{y}$ und $\sin\frac{1}{y+\delta} - \sin\frac{1}{y}$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ε werden. Demnach sind $\frac{1}{y}$ und $\sin\frac{1}{y}$ Beispiele ungleichmässig stetiger Functionen, jedoch in unmittelbarer Nähe einer Unstetigkeitsstelle, weil für $y = 0$ beide Functionen unstetig sind.

Wenn aber eine Function $F(y)$ bei Annäherung an eine bestimmte Stelle $y = a$ ungleichmässig stetig ist, so heisst das weiter nichts, als man kann von dieser Stelle aus keine Strecke δ so klein angeben, dass $F(a) - F(a - \delta)$ seinem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig kleine Grösse ε, und mit abnehmendem δ zu 0 abnimmt, also es heisst weiter nichts, als die Function $F(y)$ ist bei a unstetig. Liesse sich nämlich eine solche Strecke δ angeben, so würde auch umgekehrt $F(y)$ von $F(a - \delta)$ bis $F(a)$ gleich-

cationen des Beweises nöthig, es muss aber dann die Beschränkung gemacht werden, die im Charakter $f(x)$ an sich

---

mässig stetig sein, was gegen die Voraussetzung ist. *Also ist eine ungleichmässig stetige Function einer Variabeln in dem Puncte unstetig, in dessen unmittelbarer Nähe die ungleichmässige Stetigkeit Statt hat.*

Die Function $\sin\left(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{z}\right)$ ist, wie man sich leicht überzeugt, eine stetige Function von y und z in der Umgebung des Punctes $y = 0$, $z = 0$, wenn dieser Punct selbst ausgeschieden wird. Allein zieht man um einen beliebigen Punct $y = a$, $z = b$ einen so kleinen Kreis, dass sich die Werthe der Function auf der Peripherie, von dem im Centrum beliebig wenig, etwa um ε unterschieden, so muss der Radius dieses Kreises kleiner und kleiner gemacht werden, je näher der Punct der Stelle $z = 0$, $y = 0$ liegt. Also ist die Function eine ungleichmässig stetige, jedoch in der Nähe eines Unstetigkeitspunctes, weil in unmittelbarer Nähe von $y = 0$, $z = 0$ $\sin\left(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{z}\right)$ jedweden Werth zwischen -1 und $+1$ annehmen kann, also unstetig ist.

Wenn aber die Function $F(y, z)$ in einem Puncte $y = a$, $z = b$ stetig ist, so lege man durch den Punct a eine bestimmte Richtung und bestimme auf ihr in der Entfernung ϱ einen Punct von der Beschaffenheit, dass in ihm $\operatorname{norm}(F(y, z) - F(a, b))$ den beliebig kleinen vorgegebenen Werth ε hat, oder $< \varepsilon$ ist. Bewegt man nun diese Richtung um den Punct a, b vollständig herum, so kann bei der Drehung weder für eine bestimmte Richtung, noch bei Annäherung an eine bestimmte Richtung, ϱ kleiner als jede beliebige Zahl werden, weil in beiden Fällen $\operatorname{norm}(F(y, z) - F(a, b))$ einen Werth $\geqq \varepsilon$ in unmittelbarer Nähe von a, b besässe, wo diese Norm Null ist, also die Function unstetig wäre, was gegen die Voraussetzung ist. Demnach ist die Function $F(y, z)$ da, wo sie stetig ist, auch gleichmässig stetig.

Da nun um jeden Punct y', z' einer Linie l auf der und in deren Umgebung $F(y, z)$ stetig ist, hiernach ein Kreis gezogen werden kann, mit dem angebbaren Radius ϱ, so dass für die Puncte der Peripherie $\operatorname{norm}(F(y, z) - F(y', z')) < \varepsilon$ ist, so folgt daraus unmittelbar, dass man um l eine Contour σ ziehen kann, die nirgend in l einzulaufen braucht, damit die Werthdifferenzen der Function in entsprechenden Puncten von σ und l ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ε sind.

Ich mache bei dieser Gelegenheit aufmerksam auf einen Irrthum, in den man leicht gerathen kann, eine Function von z und y, die in einem Gebiete insoweit stetig ist, dass überall für ein vor-

nicht liegt, dass das Integral über diese Begrenzung ausführbar ist, was z. B. nicht der Fall ist, wenn die Function für $r = u$ wie $\frac{1}{(x-u)\lg(x-u)}$ unendlich wird.

Aus den hier angewandten Beweismitteln folgert man unmittelbar den Satz

IV. *Das Integral einer complexen Function* $\omega(x)$ *über die ganze Begrenzung s eines Stückes „S" erstreckt, ist gleich der Summe der Integrale der in derselben Richtung über die natürliche Begrenzung der Unstetigkeitsstellen von* $\omega(x)$ *erstreckten Integrale.*

V. *Das Integral* $\int \omega(x)\,dx$ *über jede von zwei zwischen* x_0 *und* x' *verlaufenden Linien* l', l'', *welche ein Stück „S" einschliessen, in dessen Innerm* $\omega(x)$ *den Charakter* $f(x)$ *hat, liefert einen und denselben Werth.*

Denn nach dem Cauchy'schen Satze ist das Integral von x_0 bis x' über l' vermehrt um das Integral von x' bis x_0 über l'' Null. Dieses letztere Integral ist aber negativ gleich dem Integral von x_0 bis x' über l'', woraus der zu beweisende Satz folgt.

---

gegebenes z die Function für alle Werthe von y; für ein vorgegebenes y für alle Werthe von z stetig ist, für eine in diesem Gebiete überhaupt stetige Function zu halten. Die Function $\sin 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{z}$, über welche wir bestimmen, dass sie für $y = 0$, $z = 0$ den Werth 0 haben soll, ist eine solche Function (längs der y- und z-Achse ist sie beständig 0), und ist für $y = 0$, $z = 0$ doch eine unstetige Function. Stellt die für alle bestimmte Werthe von φ convergente Reihe $\sum_{(n)0}^{\infty}(a \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$ eine stetige Function $f(\varphi)$ dar, so folgt aus einem von Abel und Dirichlet bewiesenen Satze, (Lionville's Journal Bd. 7, 1862) dass $\sum_{(n)0}^{\infty}(r^n a_n \cos n\varphi + r^n b_n \sin n\varphi)$ für $r \leqq 1$ eine Function $F(r, \varphi)$ ist, die für jedes vorgegebene φ, wenn r stetig bis zu 1 wächst, stetig in die Fnnction $f(\varphi)$ übergeht, und für jedes gegebene $r < 1$ als Potenzreihe eine stetige Function von φ, für $r = 1$ aber vorausgesetzter Maassen eine stetige Function von φ ist, so folgt hieraus noch nicht, dass $F(r, \varphi)$ bis zu $r = 1$ hin überhaupt eine stetige Function sei.

Für uns ist aber eine Function zweier Variabeln längs einer Linie stetig nur, wenn sie in jedem Puncte derselben (nach allen Richtungen) vollkommen stetig ist.

Dieser Satz bewirkt die Anwendbarkeit der Schreibweise $\int_{x_0}^{x'} \omega(x)\,dx$, in welcher von dem Integrationswege nicht die Rede ist. In der That hängt der Werth des Integrals von einem Wege l, der die Begrenzung eines Stückes „S“ nicht überschreitet, nicht ab, wenn $\omega(x)$ darin den Charakter einer Function $f(x)$ besitzt, weil dann alle Wege zwischen x_0 und x' nach dem eben ausgesprochenen Satze auf einen unter ihnen reducirt werden können. Die Angabe des Weges darf aber nicht unterlassen werden, wenn $\omega(x)$ irgendwo im Innern von S unendlich wird (während dies am Rande wohl geschehen kann), oder wenn es innerhalb eines Stückes betrachtet wird, das nicht einfach zusammenhängend ist, in welchem daher nicht alle Wege zwischen zwei Puncten auf einen reducirbar sind.

VI. *Das Integral $\int_{x_0}^{x} \omega(\xi)\,d\xi$, dessen obere und untere Grenze in einem Stück „S“ liegen, in dem $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat, ist in S eine Function der complexen Variabeln x von dem Charakter $f(x)$.*

Bezeichnen wir das Integral mit $W(x)$, so ist $W(x)$ in S offenbar endlich und stetig, es genügt aber auch der Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial y} = -i\frac{\partial W}{\partial z}$. Es ist nämlich

$$W(x+dy) - W(x) = \int_{x_0}^{x+dy} \omega(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x} \omega(\xi)\,d\xi = \int_{x}^{x+dy} \omega(\xi)\,d\xi,$$

weil man für die Wegstrecke von x_0 bis x in den beiden Integralen, deren Differenz zu bilden ist, beide mal dieselbe wählen kann. Also ist nach der Definition des Integrals $W(x+dy) - W(x) = dy\,\omega(x)$ und ebenso $W(x+i\,dz) - W(x) = i\,dz\,\omega(x)$, folglich $\frac{\partial W(x)}{\partial y} = -i\frac{\partial W(x)}{\partial z}$, w. z. b. w.

Man nimmt sehr häufig für die obere Grenze und die Integrationsvariabele einen und denselben Buchstaben.

VII. *Das Integral $\int \frac{dx}{x-\xi}$ über die natürliche Begrenzung von ξ in positiver Richtung erstreckt, hat den Werth $2\pi i$.*

Nehmen wir als natürliche Begrenzung einen um den Punct ξ mit dem Radius 1 geschlagenen Kreis, so ist norm $\left(\frac{dx}{x-\xi}\right)$

$= ds$, wenn ds ein Linienelement der Kreisperipherie bedeutet, und da die Strecke von ξ nach x senkrecht steht auf der Strecke ds, so ist der Winkel von $\frac{dx}{x-\xi}$, die Differenz der Winkel der Zahlen dx und $x-\xi$, gleich $\frac{\pi}{2}$ und daher $\frac{dx}{x-\xi} = ids$ und $\int \frac{dx}{x-\xi} = i\int ds = i2\pi$. Die Gestalt der natürlichen Begrenzung ist aber nach dem Cauchy'schen Satze völlig willkürlich, und somit ist VII. bewiesen.

Damit wir das Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$ als Function der oberen Grenze x ansehen können, ziehen wir vom 0-Puncte der x-Ebene eine Gerade q ins Unendliche, deren beide Ufer wir als Begrenzung der Ebene ansehen — wir nehmen hierzu die positive y-Achse —, dann bildet diese ein einfach zusammenhängendes Stück S, in dessen Innerm die Function $\frac{1}{x}$ den Charakter $f(x)$ hat. In diesem Stück ist daher (nach den unter V. und VI. gemachten Bemerkungen) eine eindeutig bestimmte Function von x, wenn wir noch feststellen, dass $\int_1^x \frac{dx}{x}$ für $x = 1$ auf dem positiven Ufer von q verschwinde. Bezeichnen wir nun diese Function mit $\lg x$, so ist

$$\lg(\alpha.\beta) = \int_1^{\alpha.\beta} \frac{dx}{x} = \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} + \int_{\alpha}^{\alpha.\beta} \frac{d(\alpha x)}{\alpha x}$$

und wenn wir im letzten Integrale für αx die Variable ξ einführen,

$$\lg(\alpha.\beta) = \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} + \int_1^{\beta} \frac{d\xi}{\xi} = \lg\alpha + \lg\beta.$$

Aus der Gleichung $\lg(\alpha\beta) = \lg\alpha + \lg\beta$ folgt die Uebereinstimmung unseres Integrals mit den Logarithmen irgend einer constanten Basis. Da aber auf dem negativen Ufer von q $\lg x$ um $2\pi i$ grösser ist, als auf dem positiven, so stellt das Integral die natürlichen Logarithmen dar.*) Der Satz VII. kann nun auch so ausgesprochen werden:

*) $-\lg(1-x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x}$ lässt sich leicht in eine Reihe

VII[a]. *Der natürliche Logarithmus von $x-\xi$, also $\lg x-\xi$ wächst um $2\pi i$, wenn die Variable x um die ganze Begrenzung eines den Punct ξ enthaltenden Stückes „S" herumgeführt wird.*

VIII. *Das Integral* $\int \frac{\omega(x)\,dx}{(x-\xi)\,2\pi i}$ *in positiver Richtung über die ganze Begrenzung s eines den Punct ξ im Innern enthaltenden Stückes „S", in welchem $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ besitzt, erstreckt, hat den Werth $\omega(\xi)$.*

Schreibt man nämlich $\int \frac{\omega(x)}{x-\xi}\frac{dx}{2\pi i} = \int \frac{\omega(\xi)}{x-\xi}\frac{dx}{2\pi i} +$

---

entwickeln. Es ist nämlich $\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \sum_1^m {}_{(n)} \frac{x^n}{n+1} + \int_0^x \frac{x^m}{1-x}dx,$

um nun das Integral $\int_0^x \frac{x^m\,dx}{1-x} = R_m$ zu untersuchen, integriren wir auf einer geraden Linie von 0 bis $x = r.e^{\varphi i}$, worin dann φ constant, dx demnach $= e^{i\varphi}.dr$ ist. Dann ist

$$R_m = e^{(m+1)\varphi i}\int_0^r \frac{r^m\,dr}{1-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$= e^{(m+1)\varphi i}\int_0^r \frac{r^m(1-r\cos\varphi)\,dr}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} +$$

$$ie^{(m+1)\varphi i}\sin\varphi\int_0^r \frac{r^{m+1}\,dr}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi};$$

nun ist r^m eine Function, die zwischen 0 und r ihre Zeichen nicht wechselt, folglich, wenn λ, $\mu <$ oder $= 1$ sind,

$$R_m = \frac{e^{(m+1)\varphi i}(1-\lambda r\cos\varphi)}{1-2\lambda r\cos\varphi + \lambda^2 r^2}\cdot\int_0^r r^m dr + \frac{ie^{(m+1)\varphi i}\,\mu r\sin\varphi}{1-2\mu r\cos\varphi + \mu^2 r^2}\int_0^r r^m dr$$

$$= \frac{e^{(m+1)\varphi i}.r^{m+1}}{m+1}\left(\frac{1-\lambda r\cos\varphi}{1-2\lambda r\cos\varphi + \lambda^2 r^2} + \frac{i\mu r\sin\varphi}{1-2\mu r\cos\varphi + \mu^2 r^2}\right).$$

So lange nun $r < 1$ ist, nähert sich dieser Ausdruck stets, wenn aber $r = 1$ für alle φ, ausser $\varphi = 0$ oder 2π, der Null, wenn man m gross genug nimmt, bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit. Demnach stellt die Reihe $\lim_{m=\infty} \sum_1^m {}_{(n)}\frac{x^n}{n+1}$ die Function $-\lg 1-x$ für norm $r < 1$ und für $x = e^{\varphi i}$, $\varphi \gtrless 0, 2\pi$ bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit dar.

$\int \frac{\omega(x) - \omega(\xi)}{x - \xi} \frac{dx}{2\pi i}$, so besitzt $\frac{\omega(x) - \omega(\xi)}{x - \xi}$ in S überall, auch für $x = \xi$ den Charakter $f(x)$ und das zweite Integral ist deshalb Null. $\int \frac{\omega(\xi)}{x - \xi} dx$ ist aber gleich $\omega(\xi) \int \frac{dx}{x - \xi} = 2\pi i \, \omega(\xi)$ nach Satz VII, woraus der zu beweisende Satz folgt.

Da nun $\frac{1}{x - \xi}$ einen einzigen bestimmten ersten, zweiten, dritten etc. Differentialquotienten besitzt, wenn man unter $d\xi$ eine beliebige complexe, zuletzt unendlich klein werdende Zahl versteht, also sammt seinen sämmtlichen Differentialquotienten eine complexe Function von ξ ist, so erhält man, so lange ξ im Innern, und nicht am Rande von S liegt, durch Differentiation nach der complexen Variabeln ξ die Gleichung

$$\frac{n!}{2\pi i} \int \frac{\omega(x)\,dx}{(x - \xi)^{n+1}} = \frac{d^n \omega(\xi)}{d\xi^n}$$

und den Satz:

IX. *Eine Function $\omega(x)$, die im Innern eines Stückes „S“ den Charakter $f(x)$ hat, ist sammt ihren sämmtlichen Differentialquotienten im Innern, aber nicht nothwendig am Rande, eine endliche und stetige Function der complexen Variabeln x mit dem Charakter $f(x)$.*

Denn in der That hat das bestimmte Integral $\int \frac{\omega(\xi)\,dx}{(\xi - x)^{n+1}}$ stets einen endlichen Werth, wenn $\omega(\xi)$, was vorausgesetzt wurde, am Rande von S integrabel ist, und der Punct x im Innern von S liegt, welches seine Lage auch sein möge.

Die Stetigkeit aber folgt aus der Endlichkeit der Differentialquotienten. *Demnach giebt es im Innern eines Stückes „S“, in welchem eine Function der complexen Variabeln x den Charakter $f(x)$ hat, weder eine Linie noch einen Punct, in welchem die Differentialgleichung $\frac{i\,\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial z}$ keine Anwendbarkeit besässe*, was z. B. stattfinden würde, wenn $\omega(x)$ bei Annäherung des Punctes x an einen bestimmten Punct in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe erhielte. *Ebensowenig kann es im Innern einen Punct u geben, in welchem eine solche Function $\omega(x)$ unendlich wird.* Im letzteren Falle kann man zwar den Punct x nicht auf den Punct u fallen lassen, weil dann der

Satz $\int \frac{\omega(\xi)}{\xi - u} \frac{d\xi}{2\pi i} = \omega(u)$ nicht anwendbar ist, da ja $\frac{\omega(\xi)}{\xi - u}$ für $\xi = u$ in einer höhern als der ersten Ordnung unendlich wird, d. h. mit $\xi - u$ multiplicirt, für $\xi = u$ nicht endlich bleibt. Allein es ist $\int \frac{\omega(\xi)}{\xi - u} \frac{d\xi}{2\pi i}$ immer endlich, und die Norm des Ausdruckes kann eine angebbare Zahl M, wie gross diese auch sein mag, nicht übersteigen, wie nahe auch x an u herangebracht wird, während $\omega(x)$, welches diesem Ausdrucke gleich ist, so lange x nicht genau auf u fällt, eine Norm besitzen muss, die grösser als die Zahl M gemacht werden kann, wenn man x nur nahe genug an u rückt, vorausgesetzt, dass $\omega(x)$ für $x = u$ unendlich wird, wobei zu beachten ist, dass eine durch Abänderung eines Werthes in einem einzelnen Puncte hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Daraus folgt, dass ein solcher Punct u überhaupt nicht vorhanden sein kann.

X. *Wird eine Function $\omega(x)$ im Innern eines Stückes S im Puncte u so unendlich, und im Puncte v so Null, dass $\frac{\omega(x) . (x - u)^n}{(x - v)^m}$ für x gleich u und v sowohl von Null als von Unendlich verschiedene Werthe erhält, so sind m und n ganze Zahlen, wenn $\omega(x)$ in S den Charakter $f(x)$ hat.*

Die Zahlen n und m heissen die Ordnungen des Unendlichwerdens oder Verschwindens. — Läge nämlich der reelle Theil von n zwischen p und $p + 1$, und der von m zwischen q und $q - 1$, so hätte $\frac{\omega(x)(x - u)^p}{(x - v)^q}$ in S den Charakter $f(x)$, und würde in den Puncten u und v unendlich, was nach IX. nicht möglich ist. Hingegen können am Rande von S gebrochene und complexe Ordnungen des Verschwindens und Unendlichwerdens wohl vorkommen.

XI. *Der Logarithmus einer Function $\omega(x)$, welche im Innern eines Stückes „S“ in einzelnen Puncten unendlich wird, sonst aber stetig und endlich ist, und am Rande von S weder unendlich wird noch verschwindet, also $lg\, \omega(x)$ wächst um so viele ganze Multipla von $2\pi i$, wenn x um die ganze Begrenzung von S in positiver Richtung herumgeführt wird, als der Ueberschuss der Puncte beträgt, für welche $\omega(x) = 0$ ist, über die, für welche $\omega(x) = \infty$ ist, jeden Punct so oft gerechnet,*

als die Ordnungszahl des Unendlichwerdens oder Verschwindens beträgt.

Sind die Puncte, für welche sie unendlich wird, $u, u', u'', \ldots$, die zugehörigen (nach X. immer ganzen) Ordnungen $n, n', n'', \ldots$, die Puncte, für welche sie verschwindet, $v, v', v'', \ldots$, die zugehörigen Ordnungen $m, m', m'', \ldots$, so ist der Zuwachs, den $\lg \omega(x)$ erfährt, wenn x um das unendlich kleine Stück dx fortgeführt wird,

$$d \lg \omega(x) = d \lg \left(\frac{\omega(x)(x-u)^n (x-u')^{n'} (x-u'')^{n''} \ldots}{(x-v)^m . (x-v')^{m'} . (x-v'')^{m''} \ldots}\right)$$
$$+ m\, d \lg (x-v) + m'\, d \lg (x-v') + m''\, d \lg (x-v'') + \ldots$$
$$- n\, d \lg (x-u) - n'\, d \lg (x-u') - n''\, d \lg (x-u'') - \ldots$$

und daher der Zuwachs, den der Logarithmus erfährt, wenn x um die ganze Begrenzung von S geführt wird,

$$\int d \lg \omega(x) =$$
$$\int \frac{d}{dx} \lg \left(\frac{\omega(x)(x-u)^n (x-u')^{n'} \ldots}{(x-v)^m (x-v')^{m'} \ldots}\right) dx + \sum m \int \frac{dx}{x-v} - \sum n \int \frac{dx}{x-u},$$

wenn die Integration über die ganze Begrenzung von S erstreckt wird. Nun hat das erste Integrral der rechten Seite den Werth 0, weil $\lg \left(\frac{\omega(x)(x-u)^n \ldots}{(x-v)^m \ldots}\right)$, also auch der Differentialquotient in S den Charakter $f(x)$ hat. So hat man nach Satz V.:

$$\int d \lg \omega(x) = 2\pi i (\Sigma m - \Sigma n),$$

was zu beweisen war.

XII. *Eine Function $\omega(x)$, die in der ganzen Ebene und auch für unendlich grosse x den Charakter $f(x)$ hat, ist constant.*

Wir sagen aber von einer Function $\omega(x)$, dass sie auch für $x = \infty$ den Charakter $f(x)$ besitzt, wenn $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$ für $\xi = 0$ den Charakter $f(\xi)$ hat. Nehmen wir nun das Integral $\int d \lg [\omega(x) - A]$ über die Peripherie eines sehr grossen Kreises mit dem Radius R, so kann diese Integration durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ durch die über einen sehr kleinen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{R}$ ersetzt werden, nämlich durch das Integral $\int d \lg \left[\omega\left(\frac{1}{\xi}\right) - A\right]$. Nimmt man nun R so gross, also $\frac{1}{R}$ so klein, dass im Innern desselben $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$ den Werth A nicht

annimmt, — was immer möglich ist, weil $\omega(x)$ sich mit wachsendem x, oder $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$ mit abnehmendem ξ nach dem, was Seite 21 bemerkt wurde, nur einem einzigen Werthe nähern kann, — wenn der Werth $\omega(\infty)$ nicht gerade A ist; so ist $\int d \lg \left[\omega\left(\frac{1}{\xi}\right) - A\right]$ über den Kreis $\frac{1}{R}$, also auch $\int d \lg [\omega(x) - A]$ über den Kreis R Null, weil $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right) - A$ im Innern des Kreises $\frac{1}{R}$ weder verschwindet noch unendlich wird. Daraus folgt, dass die Function $\omega(x)$ im Innern des beliebig grossen Kreises R einen andern Werth als den $\omega(\infty)$ nicht annehmen kann, w. z. b. w.

Aus den Identitäten:

$$\frac{1}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-a}{\xi - a}}$$

$$= \frac{1}{\xi - a} + \frac{(x-a)}{(\xi - a)^2} + \dots + \frac{(x-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(\xi - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{\xi - x}$$

$$\frac{1}{x - \xi} = \frac{1}{x - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{x - a}}$$

$$= \frac{1}{x - a} + \frac{\xi - a}{(x - a)^2} + \dots + \frac{(\xi - a)^n}{(x - a)^{n+1}} + \frac{(\xi - a)^{n+1}}{(x - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{x - \xi}$$

folgen die wichtigen Sätze:

XIII. *Ist x ein Punct im Innern eines Stückes „S", in welchem eine Function $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat, und welches den Punct a im Innern enthält, so ist*

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\omega(\xi)\, d\xi}{\xi - x} =$$

$$\int \frac{\omega(\xi)}{\xi - a} \cdot \frac{d\xi}{2\pi i} + (x - a)\int \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^2}\, \frac{d\xi}{2\pi i} + \dots$$

$$\dots + (x - a)^n \int \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \cdot \frac{d\xi}{2\pi i} + \frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi i} \int \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \cdot \frac{d\xi}{\xi - x},$$

worin sämmtliche Integrale in positiver Richtung über die Begrenzung von S zu nehmen sind, und

$$\omega(x) = \int \frac{\omega(\xi)}{x-\xi} \frac{d\xi}{2\pi i} =$$

$$\frac{1}{x-a}\int \frac{\omega(\xi).d\xi}{2\pi i} + \frac{1}{(x-a)^2}\int \frac{\omega(\xi)(\xi-a)\,d\xi}{2\pi i} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int \frac{\omega(\xi)(\xi-a)^n d\xi}{2\pi i} + \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int \frac{\omega(\xi)(\xi-a)^{n+1}d\xi}{(x-\xi)\,2\pi i},$$

worin die Integrationen sämmtlich in negativer Richtung über die ganze Begrenzung von S zu nehmen sind.

Ist nun $\operatorname{norm}(x-a) < \operatorname{norm}(\xi-a)$ für alle bei der Integration in Betracht kommenden ξ, also ist x ein Punct im Innern eines um den Punct a gezogenen Kreises C, der die Begrenzung von S wohl berührt, aber nirgend heraustritt, so kann man n immer so gross nehmen, dass das Integral $\frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi i}\int \frac{\omega(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \frac{d\xi}{\xi-x}$, genommen über die Begrenzung von S, oder, was in diesem Falle dasselbe ist, über die Peripherie C, jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht. In der That, setzen wir $\xi-a = Re^{\vartheta i}$, $x-a = re^{\vartheta_1 i}$, so ist R der Radius von C, r aber $< R$ und unser Integral erhält die Form

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{e^{\vartheta_1(n+1)i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\omega(a+Re^{\vartheta i})\,e^{-n\vartheta i}\,d\vartheta}{Re^{\vartheta i}-re^{\vartheta_1 i}}.$$

Das Integral ist aber, was auch n sei, endlich und der Factor $\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$ kann jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, wenn n gross genug gemacht wird. Wendet man diese Betrachtung auf das letzte Glied der ersten der unter XIII. aufgestellten Reihen an, so erhält man den T a y l o r'schen Satz:

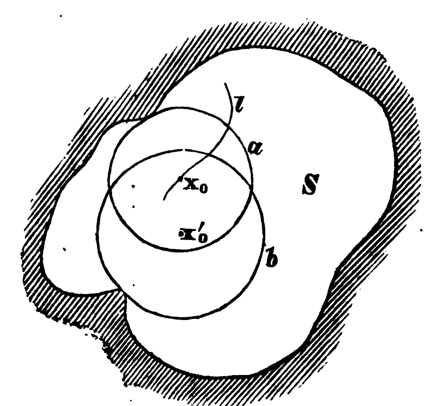
XIV. *Ist $\omega(x)$ im Innern eines Kreises um den Punct a eine Function mit dem Charakter $f(x)$, so lässt sie sich auf eine, und (nach der Methode der unbestimmten Coefficienten) nur auf eine Weise in eine unendliche Reihe nach ganzen aufsteigenden Potenzen von $x-a$ entwickeln, welche immer convergirt, so lange x ein Punct im Innern dieses Kreises ist. Dieser Kreis heisst der Convergenzkreis.*

Obgleich die hier gemachte Betrachtung des Restgliedes eigentlich nur zeigt, dass die Summe der ersten n Glieder der Reihe gegen den Werth der entwickelten Function convergire,

so sieht man doch leicht ein, dass, so lange $r = \text{norm}(x - a)$ um ein Angebbares kleiner ist als R, der Radius des Convergenzkreises, die Reihe unbedingt convergent ist, d. h. eine beliebige Anordnung der Glieder zulässt, weil der Quotient der Normen zweier aufeinander folgenden Glieder, wenn man in jedem für das Integral immer den grössten Werth setzt, den es für irgend ein n annehmen kann, sich mit wachsendem n einer Zahl unter 1 nähert. Dies findet im Allgemeinen nicht statt für die Puncte des Convergenzkreises.

XV. *Hat eine Function $\omega(x)$ innerhalb eines Stückes „S" den Charakter $f(x)$, und ist $\omega(x)$ längs eines noch so kleinen Stückes einer Linie l in S Null, so ist $\omega(x)$ überall in S Null.*

Die sämmtlichen Differentialquotienten der Function $\omega(x)$ sind für einen Punct x_0 jener Linie (l) Null, wenn man für das Differential dx eine solche Differenz $x - x_0$ wählt, deren Minuendus x auf der Linie (l) liegt, und da die Differentialquotienten einer complexen Function von der Wahl des Differentials unabhängig sind, und die Differentialquotienten einer Function einer complexen Variabeln mit dem Charakter $f(x)$ immer eben solche Functionen sind, so sind für x_0 sämmtliche Differentialquotienten Null. Nun kann man aber $\omega(x)$ auf eine und nur eine Weise (nach XIV.) nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickeln innerhalb eines Kreises a, der die Be-



grenzung von S berührt und zum Mittelpunct x_0 hat. Da nun sämmtliche Coefficienten dieser Entwicklung Null sind, so ist $\omega(x)$ im Innern dieses ganzen Kreises Null. Entwickelt man

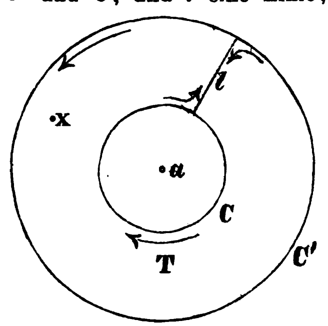
nun $\omega(x)$ nach XIV. in eine Reihe nach Potenzen von $x - x'_0$, so sind auch deren Coefficienten sämmtlich Null, wenn x'_0 ein beliebiger Punct im ersten Kreise ist. Dieser lässt sich so wählen, dass der Convergenzkreis (b) der Entwicklung zum Theil aus dem Kreis a heraustritt. In diesem ganzen Kreise ist nun $\omega(x)$ Null. So zeigt man successive, dass $\omega(x)$ in S nirgend von Null verschieden sein kann. Daraus folgt

XVI. *Ist eine Function $\omega(x)$ längs eines noch so kleinen Stückes einer Linie l in einem Stücke „S", wo sie den Charakter $f(x)$ hat, gegeben, so ist sie dadurch für alle Puncte in S eindeutig bestimmt.*

Denn eine andere Function $\omega_1(x)$ der complexen Variabeln x, welche mit ihr längs l in S übereinstimmt, stimmt überhaupt in S mit ihr überein, weil $\omega(x) - \omega_1(x)$ längs l, folglich überall Null ist.

XVII. **Laurent'scher Satz.** *Hat eine Function $\omega(x)$ im Innern und am Rande eines* (beiläufig zweifach zusammenhangenden) *Ebenenstückes T zwischen zwei im Puncte a concentrischen Kreisen den Charakter $f(x)$, so lässt sie sich auf eine, und nur auf eine Weise nach ganzen auf- und absteigenden Potenzen von $x - 0$ in eine unendliche Reihe entwickeln, die so lange convergirt, als x ein Punct im Innern von T ist.*

Seien die Peripherien des äusseren und inneren Kreises C' und C, und l eine Linie, welche beide verbindet; so bilden C, C' und die beiden Ufer von l zusammen die ganze Begrenzung eines Stückes „S", in dessen Innerm sowohl als am Rande $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat. Deshalb ist die Summe der Integrale über C' in positiver und über C in negativer Richtung, und über l in positiver und negativer Richtung, oder, da sich die beiden letzten Integrationen aufheben, die Integrale über C' und C



$$\int_{C'} \frac{\omega(\xi)}{\xi - x} \frac{d\xi}{2\pi i} + \int_{C} \frac{\omega(\xi)}{x - \xi} \frac{d\xi}{2\pi i}, \text{*)}$$

*) Wir werden häufig den Integrationsweg wie eine untere Grenze an das Integralzeichen anhängen.

beidemale in positiver Richtung integrirt, gleich $\omega(x)$, weil in der That diese beiden Integrationen zusammen der über die ganze Begrenzung von S gleich kommen. Da aber, so lange norm $(x-a) <$ norm $(\xi - a)$ ist, $\frac{1}{\xi - a}$ in die unbedingt convergente Reihe entwickelbar ist,

$$\frac{1}{\xi - x} = \sum_0^\infty{}_{(n)} \frac{(x-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}},$$

und so lange norm $(x-a) >$ norm $(\xi - a)$ ist, $\frac{1}{x-\xi}$ in die unbedingt convergente Reihe

$$\frac{1}{x-\xi} = \sum_1^\infty{}_{(n)} \frac{(\xi - a)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

entwickelbar ist, und da bei der Integration über C' wirklich norm $(x-a) <$ norm $(\xi - a)$ und bei der über C norm $(x-a) >$ norm $(\xi - a)$ ist, wenn x im Innern von T liegt, so folgt

$$\omega(x) =$$

$$\sum_0^\infty{}_{(n)} (x-a)^n \int_{C'} \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \frac{d\xi}{2\pi i} + \sum_1^\infty{}_{(n)} (x-a)^{-n} \int_C \frac{\omega(\xi)(\xi - a)^{n-1} d\xi}{2\pi i},$$

worin nun nach dem Cauchy'schen Satze statt der Integrationen über C' und C eine über einen beliebigen in a centrischen Kreis zwischen C' und C gewählt werden kann.

Damit ist die Entwickelbarkeit dargethan, es muss noch nachgewiesen werden, dass sie nur auf eine Weise möglich ist, weil hierzu die Methode der unbestimmten Coefficienten nicht ausreicht.

Sind zwei nach auf- und absteigenden Potenzen von $x-a$ geordnete, unbedingt *) convergente Reihen wenigstens für Puncte der Peripherie p eines in a centrischen Kreises einander gleich, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich sein. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} A_n (x-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} B_n (x-a)^n$$

mit $(x-a)^\mu$ und integrirt über die Peripherie p, wobei μ als

*) Diese Beschränkung muss gemacht werden, weil nur in solchen Reihen ohne Weiteres die Summation und Integration vertauscht werden kann.

ganze positive oder negative Zahl oder 0 vorausgesetzt ist, so hat man

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} A_n \int_p (x-a)^{n+\mu} dx = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n \int_p (x-a)^{n+\mu} dx,$$

so fallen auf beiden Seiten sämmtliche Terme bis auf den mit $A_{-\mu-1}$ und auf der andern bis auf den mit $B_{-\mu-1}$ multiplicirten fort. Denn es ist $\int_p (x-a)^{n+\mu} dx = 0$, wenn $n+\mu$ eine von -1 verschiedene ganze Zahl ist, und $\int_p (x-a)^{-1} dx = 2\pi i$ nach VII. Somit haben wir für alle μ

$$2\pi i\, A_{-\mu-1} = B_{-\mu-1} 2\pi i, \text{ oder } A_n = B_n, \text{ w. z. b. w.}$$

Um die Entwicklung einer Function nach der Fourier'schen Reihe abzuleiten, machen wir nun die folgenden Betrachtungen.

Eine reelle Function $h(\varphi)$, die in dem Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ gegeben ist, und für $2n\pi + \varphi$ denselben Werth als für φ annimmt, was auch n für eine ganze positive oder negative Zahl sein mag, kann als Function der Puncte der Peripherie eines Kreises der x-Ebene angesehen werden, welcher um den Nullpunct mit dem Radius 1 geschlagen ist, und kann dadurch als Function von y und z fortgesetzt werden, dass man zu allen Puncten eines und desselben Radiusvector r (der Entfernung eines Punctes vom Nullpuncte), welcher mit der y-Achse den Winkel φ macht, den Werth $h(\varphi)$ gehören lässt. Also kann gesetzt werden:

$$h(\varphi) = H(y, z) = H(r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Von der Function $h(\varphi)$ machen wir die Voraussetzungen, dass sie nur für einzelne Werthe von φ, und zwar in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Ordnung, unendlich gross, und dass sie nur für einzelne Werthe von φ unstetig werde. Diese Unstetigkeiten müssen in zwei Klassen zerlegt werden, nämlich erstens in solche, bei denen sich $h(\varphi)$, sowohl wenn φ stetig zunehmend, als auch stetig abnehmend, der Unstetigkeitsstelle, etwa $\varphi = \alpha$, nähert, bestimmten Grenzwerthen $h(\alpha-0)$ und $h(\alpha+0)$ *) stetig nähert, wie dies in der Function

*) Diese leicht verständliche Bezeichnung ist von Dirichlet eingeführt. Ich bemerke nur, dass, wenn α gleich 0 ist, für $h(+0)$ und $h(-0)$ meist $h(+0)$ und $h(2\pi-0)$ gesetzt wird, was wegen der Periodicität von $h(\varphi)$ möglich ist.

$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varphi-\alpha}$ geschieht, worin sich mit zunehmendem φ, also $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{(\alpha-0)-\alpha}$ dem Werthe $-\frac{\pi}{2}$, und mit abnehmendem φ, also $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{(\alpha+0)-\alpha}$ dem Werthe $+\frac{\pi}{2}$ stetig nähert. Zweitens in solche, bei welchen $h(\varphi)$ entweder abnehmend oder zunehmend zwar endlich bleibt, aber bestimmten Grenzwerthen sich nicht nähert, was nur dann geschieht, wenn die Function wie $\sin\left(\frac{1}{\varphi-\beta}\right)$ an der Stelle β unendlich viele Maxima und Minima besitzt, deren Differenzen nicht zu 0 abnehmen. Bei diesen Voraussetzungen ist die Function $h(\varphi)$ einer Integration durchgehend fähig.

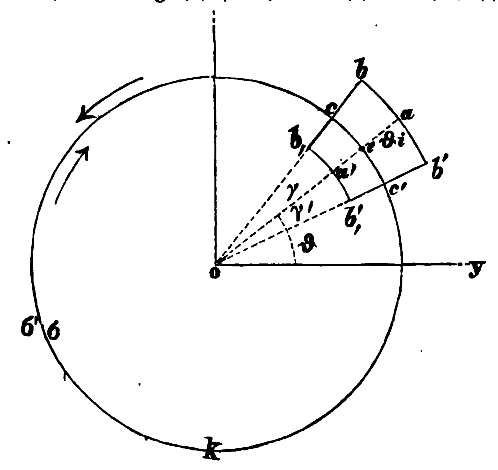
Diese Voraussetzungen festhaltend betrachten wir nun das Integral

$$\int \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}}\,\frac{dx}{2\pi i},$$

welches erstreckt wird über das positive Ufer des Einheitskreises von c an bis zu c', dann von c' bis zu b' über ein kleines Stück eines Radiusvector, und von b' bis zu b über den Bogen eines Kreises, dessen Radius $\frac{1}{\varrho}$ sein soll und von b' bis c zurück über ein Stück Radiusvector. Dieser ganze Weg soll mit σ' bezeichnet werden. Das Integral soll nun weiter erstreckt werden von c bis b, über ein Stück Radiusvector, von b, bis b', über den Bogen eines Kreises, dessen Radius ϱ ist, von b', bis c' über ein Stück Radiusvector, von c' bis c über das innere Ufer der Peripherie des Einheitskreises. Dieser Weg in entgegengesetzter als der beschriebenen Richtung soll mit σ, in derselben Richtung aber mit $\bar{\sigma}$ bezeichnet werden.

Wir erstrecken also das Integral $\int \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}}\,\frac{dx}{2\pi i}$ über σ' und $\bar{\sigma}$, machen aber dabei die Voraussetzung, dass φ für $\varphi=\vartheta$ weder auf einen Punct falle, für welchen $h(\varphi)$ unendlich wird, noch auf einen Punct, für welchen $h(\varphi)$ so unstetig wird, dass entweder $h(\vartheta+0)$ oder $h(\vartheta-0)$ keinen Sinn hat, und machen den Winkel γ zwischen den Radius $0a$ und $0b$, und den Winkel γ' zwischen $0b'$ und $0a$ so klein, dass $h(\varphi)$ für $\vartheta<\varphi\leqq\vartheta+\gamma$, und $\vartheta>\varphi\geqq\vartheta-\gamma'$ stetig ist, was bei der gemachten Voraussetzung offenbar immer geschehen kann.

Bezeichnen wir nun noch der Kürze halber den Weg (a, b, c) mit τ, den Weg $(c, b_{,}, a')$ mit $\overline{\tau}_{,}$, und $(a', b_{,}, c)$ mit $\tau_{,}$,



den Weg $(a', b'_{,}, c')$ mit $\overline{\tau'}_{,}$, $(c', b'_{,}, a')$ mit $\tau'_{,}$, und den Weg (c', b', a) mit τ', so haben wir offenbar

$$\int\limits_{\sigma'} \frac{H(,z)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i} + \int\limits_{\overline{\sigma}} \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i} = \int\limits_{(\tau+\overline{\tau}_{,}+\overline{\tau'}_{,}+\tau')} \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i},$$

weil sich die Integrationen von c' bis c über die Peripherie des Einheitskreises genommen vollständig aufheben. Das Integral aber genügt der Gleichung

$$\int\limits_{(\tau+\overline{\tau}_{,}+\overline{\tau'}_{,}+\tau')} \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i} = \tfrac{1}{2} h(\vartheta+0) + \tfrac{1}{2} h(\vartheta-0)$$

bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit, wenn γ und γ' klein genug, und ϱ nahe genug an 1 genommen werden.

Um dies nachzuweisen schreiben wir

$$\int\limits_{(\tau+\overline{\tau}_{,}+\overline{\tau'}_{,}+\tau')} \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i} =$$

$$\int\limits_{(\tau+\overline{\tau}_{,})} \frac{H(y,z)-h(\vartheta+0)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i} + \frac{h(\vartheta+0)}{2\pi i} \int\limits_{(\tau+\overline{\tau}_{,})} \frac{dx}{x-e^{\vartheta i}}$$

$$+ \int\limits_{(\overline{\tau'}_{,}+\tau')} \frac{H(y,z)-h(\vartheta-0)}{x-e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i} + \frac{h(\vartheta-0)}{2\pi i} \int\limits_{(\overline{\tau'}_{,}+\tau')} \frac{dx}{x-e^{\vartheta i}}.$$

Es ist aber $\int\limits_{(\tau+\bar{\tau}_{,})} \frac{dx}{x - e^{\vartheta i}}$ der Zuwachs, welchen $\lg(x - e^{\vartheta i})$ erfährt, wenn x um den Punct $x = e^{\vartheta i}$ von a bis a' in positiver Richtung herumgeführt wird. Dieser Zuwachs hat den Werth

$$\pi i + \lg \frac{1 - \varrho}{\frac{1}{\varrho} - 1} = \pi i + \lg \varrho.$$

Ebenso ist $\int\limits_{(\tau'+\bar{\tau}'_{,})} \frac{dx}{x - e^{\vartheta i}}$ der Zuwachs, welchen $\lg(x - e^{\vartheta i})$ erfährt, wenn x um den Punct $e^{\vartheta i}$ in positiver Richtung von a' bis a herumgeführt wird, und hat den Werth

$$\pi i - \lg \varrho.$$

Das Integral $\int\limits_{(\tau+\bar{\tau}_{,})} \frac{H(y, z) - h(\vartheta + 0)}{x - e^{\vartheta i}} \frac{dx}{2\pi i}$ kann in die drei Integrale, über ab, bb', $b'a'$ zerlegt werden, und es ist im ersten und letzten r, im zweiten φ constant, so dass man im ersten und dritten $h(\varphi)$ für $H(y, z)$, im zweiten $h(\vartheta + \gamma)$ schreiben kann, und somit findet man

$$\int\limits_{(\tau+\bar{\tau}_{,})} \frac{H(y, z) - h(\vartheta + 0)}{x - e^{\vartheta i}} \cdot \frac{dx}{2\pi i} =$$

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\gamma} \frac{h(\varphi) - h(\vartheta + 0)}{\frac{1}{\varrho} e^{\varphi i} - e^{\vartheta i}} \frac{e^{\varphi i} . d\varphi}{2\pi\varrho}$$

$$+ \int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \frac{h(\vartheta + \gamma) - h(\vartheta + 0)}{r e^{(\vartheta+\gamma)i} - e^{\vartheta i}} \cdot \frac{e^{(\vartheta+\gamma)i} dr}{2\pi i}$$

$$- \int_{\vartheta}^{\vartheta+\gamma} \frac{h(\varphi) - h(\vartheta + 0)}{\varrho e^{\varphi i} - e^{\vartheta i}} \frac{\varrho e^{\varphi i} d\varphi}{2\pi}.$$

Und wenn wir im ersten und dritten Gliede der rechten Seite $\varphi = \vartheta + \psi$ setzen und beide zusammenziehen, so ist das Integral über $(\tau + \bar{\tau}_{,})$ gleich

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\gamma}\frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{2\pi}e^{\psi i}\left(\frac{1}{e^{\psi i}-\varrho}-\frac{1}{e^{\psi i}-\frac{1}{\varrho}}\right)d\psi\\ \displaystyle\quad+\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)}{2\pi i}e^{\gamma i}\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho}\frac{dr}{re^{\gamma i}-1}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\gamma}\frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{2\pi}e^{\psi i}\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{1-\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)e^{\psi i}+e^{2\psi i}}d\psi\\ \displaystyle\quad+\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)}{2\pi i}.\lg\frac{\varrho e^{\gamma i}-1}{\frac{1}{\varrho}e^{\gamma i}-1}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\gamma}\frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{2\pi}\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}d\psi\\ \displaystyle\quad+\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)}{2\pi i}.\lg\frac{\varrho e^{\gamma i}-1}{\frac{1}{\varrho}e^{\gamma i}-1}\end{array}\right\}.$$

Nun wechselt die Function $\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}$ in dem Intervall von $\psi=0$ bis $\psi=\gamma$ ihr Zeichen nicht, mithin können wir setzen

$$\int_0^{\gamma}\frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{2\pi}\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}d\psi$$

$$=\frac{p.(1-\varrho^2)}{2\pi}\int_0^{\gamma}\frac{d\psi}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}=\frac{p}{\pi}.\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\right)$$

wenn p einen Mittelwerth zwischen dem grössten und kleinsten Werthe $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ in dem Intervall der Integration bedeutet.

Schreiben wir für $\lg\frac{\varrho e^{\gamma i}-1}{\frac{1}{\varrho}e^{\gamma i}-1}$ $\quad\lg\frac{\sqrt{\varrho}e^{\frac{\gamma i}{2}}-\frac{1}{\sqrt{\varrho}}e^{-\frac{\gamma i}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho}}e^{\frac{\gamma i}{2}}-\sqrt{\varrho}e^{-\frac{\gamma i}{2}}}.\varrho$

oder

$$\lg\varrho + \lg\frac{\left(\sqrt{\varrho}-\sqrt{\frac{1}{\varrho}}\right)\cos\gamma + i\left(\sqrt{\varrho}+\sqrt{\frac{1}{\varrho}}\right)\sin\gamma}{-\left(\sqrt{\varrho}-\sqrt{\frac{1}{\varrho}}\right)\cos\gamma + i\left(\sqrt{\varrho}+\sqrt{\frac{1}{\varrho}}\right)\sin\gamma}$$
$$= \lg\varrho + 2i\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\mathrm{cotg}\,\gamma\right),$$

so erkennen wir sofort, dass dieser Ausdruck immer endlich ist, für $\varrho = 1$ aber der Grenze 0 zustrebt, wie klein auch γ vorgegeben sein mag. Somit haben wir endlich gefunden

$$\int\limits_{(\tau+\bar{\tau}_{,})}\frac{H(y,z)-h(\vartheta+0)}{x-e^{\vartheta i}}\cdot\frac{dx}{2\pi i}$$
$$= \frac{h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)}{\pi}\,.\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\gamma\right)$$
$$+\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)}{2\pi i}\left(\log\varrho + 2i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\mathrm{cotg}\,\gamma\right),$$

worin $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist. In gleicher Weise findet man

$$\int\limits_{(\bar{\tau}'_{,}+\tau')}\frac{H(y,z)-h(\vartheta-0)}{x-e^{\vartheta i}}\cdot\frac{dx}{2\pi i}$$
$$= \frac{h(\vartheta-\lambda'\gamma')-h(\vartheta-0)}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\gamma'\right)$$
$$-\frac{h(\vartheta-\gamma')-h(\vartheta-0)}{2\pi i}\left(\lg\varrho - 2i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\mathrm{cotg}\,\gamma'\right),$$

worin $0 \leqq \lambda' \leqq 1$ ist. Fassen wir dies zusammen, so haben wir

$$\int\limits_{(\tau+\bar{\tau}_{,}+\bar{\tau}'_{,}+\tau')}\frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}}\,\frac{dx}{2\pi i} = \tfrac{1}{2}[h(\vartheta+0)+h(\vartheta-0)] + E(\gamma,\gamma',\varrho),$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$E(\gamma,\gamma',\varrho) =$$
$$\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta-\gamma')}{2\pi i}\lg\varrho + \frac{h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,\mathrm{tg}\,\gamma\right)$$
$$+\frac{h(\vartheta-\lambda'\gamma')-h(\vartheta-0)}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\gamma'\right)$$
$$+\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,\mathrm{cotg}\,\gamma\right)$$
$$-\frac{h(\vartheta-\gamma')-h(\vartheta-0)}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,\mathrm{cotg}\,\gamma'\right),$$

welche Function unter den über $h(\varphi)$ und ϑ gemachten Vor-

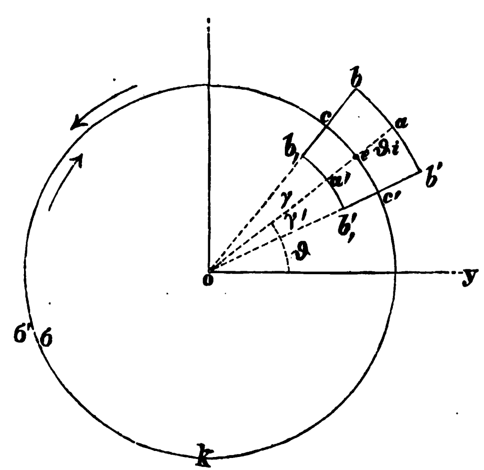
aussetzungen kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse ε gemacht werden kann, wenn nur ϱ nahe genug an Eins, und γ und γ' nahe genug an Null genommen werden. Für jedes noch so kleine vorgegebene γ und γ' strebt diese Function gegen die Grenze $\frac{h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)}{2}+\frac{h(\vartheta-\lambda'\gamma')-h(\vartheta-0)}{2}$, wenn ϱ zur Grenze 1 übergeht.

Daher ist nun auch

$$(A)\qquad \int\limits_{\sigma'}\frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}}\frac{dx}{2\pi i}+\int\limits_{\sigma}\frac{H(y,z)}{e^{\vartheta i}-x}\frac{dx}{2\pi i}=$$
$$\tfrac{1}{2}[h(\vartheta+0)+h(\vartheta-0)]+E(\gamma,\gamma',\varrho),$$

also von $\frac{1}{2}[h(\vartheta+0)+h(\vartheta-0)]$ beliebig wenig verschieden, w. z. b. w.

Damit aber $E(\gamma,\gamma',\varrho)$ seinem absoluten Betrage nach immer unter einer Grösse ε bleibe, dazu ist nöthig, dass γ oder γ' kleiner und kleiner genommen werden, wenn ϑ näher und näher an eine Unstetigkeitsstelle rückt, an welcher $h(\varphi)$ entweder unendlich wird, oder einen Sprung macht, der grösser als ε ist. An andern Stellen aber wird sich durchgehend eine Grösse δ angeben lassen, unter welche γ, γ' nicht herabzusinken brauchen, damit $E<\varepsilon$ ist, weil eine stetige Function auch eine gleichmässig stetige ist (nach pag. 14, Anmerkung).



Anderseits stellen wir die Identität auf:

$$(\mathrm{B.})\quad \int\limits_{\sigma'} \frac{H(y,z)}{x-e^{\vartheta i}}\,\frac{dx}{2\pi i}+\int\limits_{\sigma}\frac{H(y,z)}{e^{\vartheta i}-x}\cdot\frac{dx}{2\pi i}=$$

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{(\mu)}e^{\mu\vartheta i}\int\limits_{\sigma'}\frac{H(y,z)}{x^{\mu+1}}\cdot\frac{dx}{2\pi i}+\frac{e^{n\vartheta i}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\sigma'}\frac{H(y,z)\,dx}{x^{n}(x-e^{\vartheta i})}+$$

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{e^{-\mu\vartheta i}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\sigma}\frac{H(y,z)\,dx}{x^{-\mu+1}}+\frac{e^{-(n-1)\vartheta i}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{H(y,z)\,x^{n-1}dx}{e^{\vartheta i}-x}.$$

Wählt man für die Integrationswege σ', σ der unter dem Zeichen Σ stehenden Integrale die ganze Peripherie k des Einheitskreises, so müssen zu diesem Integrationswege k noch die Wege $cc'+\tau'+\tau$ bez. $cc'+\tau'_{,}+\tau'$ hinzuaddirt werden, damit die Wege σ' bez. σ wieder erhalten werden. Nun sei

$$F(\varrho)=\sum_{0}^{n-1}{}_{(\mu)}e^{\mu\vartheta i}\int\limits_{(cc'+\tau'+\tau)}\frac{H(y,z)}{x^{\mu+1}}\cdot\frac{dx}{2\pi i}+\sum_{1}^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{e^{-\mu\vartheta i}}{2\pi i}\int\limits_{(cc'+\tau'_{,}+\tau_{,})}H(y,z)x^{\mu-1}dx$$

und

$$G(\gamma,\gamma',\varrho,n)=\int\limits_{\sigma'}\frac{e^{n\vartheta i}.H(y,z)}{x^{n}(x-e^{\vartheta i})}\cdot\frac{dx}{2\pi i}+\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-(n-1)\vartheta i}H(y,z)}{x^{-n+1}(e^{\vartheta i}-x)}\,\frac{dx}{2\pi i}$$

und es werde in den über die ganze Peripherie k zu nehmenden Integralen x durch $e^{\varphi i}$ ersetzt, und es werden je zwei entsprechende Glieder (in welchen die Zahl μ dieselbe ist) zusammengezogen, so folgt aus den Gleichungen (B.) und (A.)

$$(\mathrm{C.})\quad \int\limits_{\sigma'}\frac{H(y,z).dx}{(x-e^{\vartheta i})2\pi i}+\int\limits_{\sigma}\frac{H(y,z).dx}{(e^{\vartheta i}-x)2\pi i}$$

$$=\tfrac{1}{2}h(\vartheta+0)+\tfrac{1}{2}h(\vartheta-0)+E(\gamma,\gamma',\varrho)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{0}^{2\pi}h(\varphi)\,d\varphi+\sum_{1}^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{2\pi}h(\varphi)\cos\mu(\vartheta-\varphi)\,d\varphi+F(\varrho)$$
$$+\,G(\gamma,\gamma',\varrho,n).$$

Zunächst zeigen wir nun, dass ϱ so wenig von Eins verschieden genommen werden kann, dass $F(\varrho)$ jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht.*) Zu dem Zwecke zerlegen wir

---

*) Eine genauere Untersuchung von $F(\varrho)$ ergiebt, dass in den meisten Fällen dieser Ausdruck jeden beliebigen Grad von Kleinheit gleichmässig für alle n erhalten kann, d. h., ohne dass es nöthig

den Weg $cc'+\tau+\tau'$ in die beiden cc', $b'b$, in welchen r, und in die beiden $c'b'$, bc, in welchen φ constant ist, und setzen noch $\psi+\vartheta$ für φ, so haben wir, wenn $\mu>0$ ist,

$$e^{\mu\vartheta i}\int\limits_{(cc'+\tau'+\tau)}\frac{H(y,z)\,dx}{x^{\mu+1}.2\pi i} =$$

$$\frac{\varrho^{\mu}-1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma'}^{\gamma}h(\vartheta+\psi)e^{-\mu\psi i}d\psi+\frac{h(\vartheta-\gamma')e^{\mu\gamma' i}-h(\vartheta+\gamma)e^{-\mu\gamma i}}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\frac{1}{\varrho}}\frac{dr}{r^{\mu+1}}$$

$$=\frac{\varrho^{\mu}-1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma'}^{\gamma}h(\vartheta+\psi)e^{-\mu\psi i}d\psi+\frac{h(\vartheta-\gamma')e^{\mu\gamma' i}-h(\vartheta+\gamma)e^{-\mu\gamma i}}{2\pi i}\cdot\frac{1-\varrho^{\mu}}{\mu}$$

und für $\mu=0$

$$\int\limits_{(cc'+\tau'+\tau)}\frac{H(y,z)\,dx}{x.2\pi i}=\frac{h(\vartheta-\gamma')-h(\vartheta+\gamma)}{2\pi i}\lg\varrho.$$

Aehnlich findet man

$$\frac{e^{-\mu\vartheta i}}{2\pi i}\int\limits_{(cc'+\tau'_{,}+\tau_{,})}\frac{H(y,z)\,dx}{x^{-\mu+1}} =$$

$$\frac{\varrho^{\mu}-1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma'}^{\gamma}h(\vartheta+\psi)\,e^{\mu\psi i}d\psi+\frac{h(\vartheta+\gamma)e^{\mu\gamma i}-h(\vartheta-\gamma')e^{-\mu\gamma' i}}{2\pi i}\cdot\frac{1-\varrho^{\mu}}{\mu}$$

und demnach

$$F(\varrho) = h(\vartheta+\gamma).\sum_{1}^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{(1-\varrho^{\mu})\sin\mu\gamma}{\mu\pi i}$$

$$+h(\vartheta-\gamma').\sum_{1}^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{(1-\varrho^{\mu})\sin\mu\gamma'}{\mu\pi i}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\gamma'}^{\gamma}h(\vartheta+\psi)\sum_{1}^{n-1}{}_{(\mu)}(\varrho^{\mu}-1)\cos\mu\psi.d\psi$$

$$+\frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta-\gamma')}{2\pi i}\lg\varrho.$$

---

wäre, die Annäherung von ϱ an Eins in ein Verhältniss zur Zahl n zu setzen. Da dieser Nachweis aber complicirt ist, und über den Grad der Annäherung von ϱ an 1, wie sich später zeigen wird, Beschränkungen nicht gemacht zu werden brauchen, so genügt die hier gegebene Betrachtung.

Ist hierin der grösste der Coefficienten von $\lg \varrho$, $1-\varrho$, $1-\varrho^2$, ... $1-\varrho^{n-1}$ seinem absoluten Betrage nach L, so kann man den absoluten Betrag von $F(\varrho)$ dadurch kleiner als eine noch so kleine vorgegebene Zahl ε machen, dass man $1-\varrho^n < \frac{\varepsilon}{nL}$ nimmt, weil dann der absolute Betrag jedes Gliedes der Summe kleiner als $\frac{\varepsilon}{n}$ ist, und der absolute Betrag einer Summe kleiner, höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge ist. Somit ist bewiesen, dass $F(\varrho)$ durch Annäherung von ϱ an 1 jeden beliebigen Grad von Kleinheit erhalten kann.

Die Function $G(\gamma, \gamma', \varrho, n)$ zerlegen wir in eine Summe von zwei Ausdrücken:

$$J(\gamma, \gamma', n) + K(\gamma, \gamma', \varrho, n),$$

worin der erste Term diejenigen Beiträge zu den Integralen über σ' und σ der Function G enthält, welche von dem Wegstücke von c bis c' über den Einheitskreis k herrühren. Setzt man in diesem Theile $x = e^{\varphi i} = e^{(\vartheta + \psi)i}$, so kann er geschrieben werden:

$$J(\gamma, \gamma', n) = \int_{\gamma+\vartheta}^{2\pi-\gamma'+\vartheta} \frac{h(\varphi)}{2\pi} \left(\frac{e^{n(\vartheta-\varphi)i}}{1-e^{(\vartheta-\varphi)i}} + \frac{e^{-n(\vartheta-\varphi)i}}{1-e^{(\varphi-\vartheta)i}} \right) d\varphi$$

$$= -\int_{\gamma+\vartheta}^{2\pi-\gamma'+\vartheta} \frac{h(\varphi)}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2n-1}{2}(\varphi-\vartheta)}{\sin\left(\frac{\varphi-\vartheta}{2}\right)} \cdot d\varphi$$

$$= -\int_{\gamma}^{2\pi-\gamma'} \frac{h(\vartheta+\psi)}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n-1}{2}\psi}{\sin \frac{1}{2}\psi} d\psi,$$

und hängt offenbar nicht von ϱ ab. Der zweite Term, welcher diejenigen Beiträge der Integrale über σ', σ enthält, welche von den Wegen $\tau' + \tau$ bez. $\tau'_{,} + \tau_{,}$ herrühren, erhält eine etwas einfachere Form, wenn man x durch $\xi . e^{\vartheta i}$ ersetzt, also eine Drehung des Coordinatensystems um den Winkel ϑ vornimmt. Dann ist

$$K(\gamma,\gamma',\varrho,n) = \int\limits_{(\tau+\tau')} \frac{H(y,z)\,d\xi}{\xi^n(\xi-1)2\pi i} + \int\limits_{(\tau',+\tau,)} \frac{H(y,z)\,\xi^{n-1}d\xi}{(1-\xi)2\pi i} =$$

$$\int\limits_{\tau} \frac{[H(y,z)-h(\vartheta+0)]\,d\xi}{\xi^n(\xi-1)\,2\pi i} - \int\limits_{\tau,} \frac{[H(y,z)-h(\vartheta+0)]\,\xi^{n-1}\,d\xi}{(\xi-1)2\pi i}$$

$$+ \int\limits_{\tau'} \frac{[H(y,z)-h(\vartheta-0)]\,d\xi}{\xi^n(\xi-1)2\pi i} - \int\limits_{\tau',} \frac{[H(y,z)-h(\vartheta-0)]\,\xi^{n-1}d\xi}{(\xi-1)2\pi i}$$

$$+ \frac{h(\vartheta+0)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\tau} \frac{\xi^{-n}d\xi}{\xi-1} - \int\limits_{\tau'} \frac{\xi^{n-1}d\xi}{\xi-1}\right)$$

$$+ \frac{h(\vartheta-0)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\tau'} \frac{\xi^{-n}d\xi}{\xi-1} - \int\limits_{\tau',} \frac{\xi^{n-1}d\xi}{\xi-1}\right).$$

Nun ist weiter durch Zerlegung des Weges τ in $(ab+bc)$ und $\tau,$ in $(a'b,+b,c)$:

$$\int\limits_{\tau} \frac{[H(y,z)-h(\vartheta+0)]\,d\xi}{\xi^n(\xi-1)2\pi i} - \int\limits_{\tau'} \frac{[H(y,z)-h(\vartheta+0)]\,\xi^{n-1}d\xi}{(\xi-1)\,2\pi i}$$

$$= \int_0^{\gamma} \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{2\pi}\left(\frac{\varrho^n e^{-n\psi i}}{1-\varrho e^{-\psi i}} + \frac{\varrho^n e^{n\psi i}}{1-\varrho e^{\psi i}}\right)d\psi$$

$$- \frac{h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)}{2\pi}\left(e^{-(n-1)\gamma i}\int_1^{\frac{1}{\varrho}} \frac{r^{-n}dr}{re^{\gamma i}-1} - e^{n\gamma i}\int_1^{\varrho} \frac{r^{n-1}dr}{re^{\gamma i}-1}\right)$$

Hierin nähern sich die beiden letzten Integrale beliebig der 0 für jedes noch so kleine vorgegebene γ, wenn ϱ der Eins unendlich genähert wird*), weil die zu integrirenden Functionen endlich bleiben, und der Integrationsweg unendlich klein wird.

Es bleibt noch das Integral zu behandeln

$$\varrho^n \int_0^{\gamma} \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{2\pi}\left(\frac{e^{-n\psi i}}{1-\varrho e^{\psi i}} + \frac{e^{n\psi i}}{1-\varrho e^{\psi i}}\right)d\psi =$$

$$\varrho^n \int_0^{\gamma} \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{\pi} \cos n\psi \frac{1-\varrho}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}\,d\psi$$

$$- 2\varrho^n \int_0^{\gamma} \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{\pi} \cdot \frac{\sin\frac{2n-1}{2}\sin\frac{1}{2}\psi}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\psi}\,d\psi.$$

---

*) Dass dies mit wachsendem n auch stattfindet, selbst wenn

In dem ersten Integrale der rechten Seite können wir einen Mittelwerth zwischen dem grössten und kleinsten Werthe von $[h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)]\cos n\psi$ vor das Integralzeichen setzen, weil $\frac{1-\varrho}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}$ in dem Intergrationsintervall sein Zeichen nicht wechselt. Ist dieser q, so hat das Integral den Werth

$$\frac{\varrho^n q}{\pi}\int_0^\gamma \frac{1-\varrho}{1-2\varrho\cos\psi+\varrho^2}d\psi=\frac{2q\varrho^n}{\pi(1+\varrho)}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma$$

und kann, selbst wenn $\varrho=1$ gesetzt wird, unabhängig von n jeden beliebigen Grad der Kleinheit erreichen, wenn γ klein genug gemacht wird.

In dem zweiten Integrale der rechten Seite werde zunächst die Voraussetzung gemacht, dass eine wenn auch noch so kleine positive Zahl ν angegeben werden könne von der Beschaffenheit, dass sich $\frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{\psi^\nu}$ mit abnehmendem ψ der 0 noch stetig nähert, gleichviel ob $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ unendlich viele Maxima und Minima hat, wie $\psi^{2\nu}.\sin\frac{1}{\psi}$, oder nicht. In diesem Falle schreiben wir das zweite Integral

$$-\frac{2\varrho^n}{\pi}\int_0^\gamma \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{\psi^\nu}\sin\frac{2n-1}{2}\psi\,\frac{\psi^\nu\sin\frac{1}{2}\psi}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\psi}d\psi$$

$$=-\frac{2\varrho^n}{\pi}\,\frac{h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)}{(\lambda\gamma)^\nu}\sin\frac{2n-1}{2}\lambda\gamma.\int_0^\gamma\frac{\psi^\nu\sin\frac{1}{2}\psi}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\psi}d\psi,$$

worin $0\leqq\lambda\leqq 1$ ist. Das letzte Integral wird seinem absoluten Betrage nach vergrössert, wenn man ϱ durch 1 ersetzt, und ist also kleiner als $\frac{1}{4}\int_0^\gamma\frac{\psi^\nu}{\sin\frac{1}{2}\psi}d\psi$, und da der Sinus grösser als der halbe Bogen ist, kleiner als $\int_0^\gamma\psi^{\nu-1}d\psi=\frac{\gamma^\nu}{\nu}$, also das Ganze $<\frac{2\varrho^n}{\pi}\,\frac{h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)}{\lambda^\nu.\nu}\sin\frac{2n-1}{2}\lambda\gamma$, und kann daher, was auch n sein mag, jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, wenn γ klein genug genommen wird.

---

man $1-\varrho$ nicht über alle Grenzen klein macht, erkennt man durch ganz ähnliche Betrachtungen, als die pag. 18 in der Anmerkung auf ein ähnliches Integral angewendet sind.

Nähert sich $h(\alpha+\delta)-h(\alpha)$ mit abnehmendem δ so der Null, dass diese Differenz mit δ^a dividirt, oder mit $lg\,\delta$, oder $(lg\,\delta)^2$, oder $lg\,lg\,lg\,\delta = lg^3\delta$, etc. multiplicirt jedenfalls endlich bleibt (wenn auch nicht gerade gegen eine bestimmte Grenze convergirt, aber zwischen zwei bestimmte Zahlen eingeschlossen werden kann), *so wollen wir den Exponenten a, oder die Functionszeichen lg, $(lg)^2$, lg^3 etc. bez das Maass der Stetigkeit der Function $h(\varphi)$ an der Stelle α nennen.**)

---

*) Die Maasse der Stetigkeit, oder was dasselbe ist, die Ordnungen des Verschwindens einer Function, bilden ein stetiges Grössengebiet einer Ausdehnung (confer. Riemann, „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" pag. 3. §. 1), welches unendlich viel dichter ist, als das Gebiet der in dieser Mannigfaltigkeit mit enthaltenen gemeinen reellen Zahlen, wenn man die Ordnung x als Maasseinheit der Ordnungen nimmt, so dass x^μ die μte Ordnung ist, und diese Ordnung ein bestimmtes Einzelnes in dieser Mannigfaltigkeit bedeutet. Lassen wir diese Ordnung der Zahl μ entsprechen, so entspricht $\frac{1}{\lg x}$ einer Zahl, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch die Null nicht ist, d. h. im gemeinen Zahlengebiet keiner Zahl. Ebensowenig entsprechen $(\lg)^\mu$, $\lg\lg, \ldots (\lg^m)^\mu$ einer Zahl.

Bezeichnet man die Ordnung von $x^\alpha . \frac{1}{(\lg x)^\beta} . \frac{1}{(\lg\lg x)^\gamma} \ldots \ldots \frac{1}{(\lg^m x)^\mu}$ mit $\alpha+\beta\lg+\gamma\lg\lg+\ldots\mu\lg^m$, worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ gewöhnliche reelle Zahlen sind, so findet in diesem Zahlengebiete, — wenn dieser Name gestattet ist, — ein deutliches Aussereinander statt. Dividirt man zwei Functionen, die in verschiedenen Ordnungen verschwinden, durcheinander, so wird man diejenige Ordnung die höhere nennen, welche der Zählerfunction angehört, wenn der Quotient noch mit x zu Null herabsinkt, und wenn der Quotient mit herabsinkendem x endlich und von 0 verschieden bleibt, so wird man die Ordnungen gleiche nennen. Demnach ist von den zwei Zahlen $\alpha+\beta\lg+\gamma\lg\lg+\ldots\mu\lg^m$, $\alpha'+\beta'\lg+\gamma'\lg\lg+\ldots\mu'\lg^{m'}$ die erste die grössere, wenn die erste der Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, ..., welche nicht verschwindet, eine positive gewöhnliche Zahl ist.

Da sich die Ordnung $\lg\lg$ zur Ordnung $\lg$ genau so verhält, als die Ordnung $\lg$ zu der Ordnung 1, so hat man $\lg\lg : \lg = \lg : 1$ oder $\lg\lg = \lg . \lg$, woraus sich für die Multiplication zweier solcher Zahlen die Regel ergiebt:

Dabei kann natürlich dieses Maass für ein φ, welches abnehmend gegen α strebt, ein anderes sein, als für ein φ, welches zunehmend gegen α strebt.

Wenn nun das Maass der Stetigkeit der Function $h(\vartheta+\gamma)-h(\vartheta+0)$ mindestens $\lg.\lg\lg\ldots\lg^{m-1}.(\lg^m)^{\alpha+1}$ für abnehmende γ ist, und α um ein Angebbares grösser als Null ist, so kann die eben gebrauchte Schlussweise auf das Integral $\frac{2\varrho^n}{\pi}\int_0^\gamma [h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)]\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\psi}d\psi$ noch immer angewendet werden. Dann schreiben wir dies, indem wir zur Abkürzung $L(\psi)=\lg\psi.\lg\lg\psi\ldots\lg^{m-1}\psi.(\lg^m\psi)^{1+\frac{1}{2}\alpha}$ setzen, in die Form:

$$\frac{2\varrho^n}{\pi}\int_0^\gamma \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)\sin\frac{2n-1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi.\psi.L(\psi)}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\psi}.\frac{d\psi}{\psi L(\psi)}=$$

$$\frac{2\varrho^n}{\pi}.\frac{h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)\sin\frac{2n-1}{2}\lambda\gamma\sin\frac{1}{2}\lambda\gamma.\lambda\gamma.L(\lambda\gamma)}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\lambda\gamma}.\int_0^\gamma\frac{d\psi}{\psi L(\psi)},$$

worin $0\leqq\lambda\leqq1$ ist. Es ist aber $\frac{d\psi}{\psi L(\psi)}=-\frac{2}{\alpha}d(\lg^m\psi)^{-\frac{1}{2}\alpha}$

und $\int_0^\gamma\frac{d\psi}{\psi L(\psi)}=-\frac{2}{\alpha}[\lg^m(\gamma)]^{-\frac{1}{2}\alpha}$, also ist der untersuchte Ausdruck gleich

$$-\frac{4\varrho^n}{\alpha\pi},\frac{L(\lambda\gamma).[h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)]}{[\lg^m(\gamma)]^{\frac{\alpha}{2}}}.\frac{\lambda\gamma\sin\frac{1}{2}\lambda\gamma}{\varrho+\frac{1}{\varrho}-2\cos\lambda\gamma}\sin\frac{2n-1}{2}\lambda\gamma$$

und man kann daher, unabhängig von n, γ so klein annehmen, dass dieser Ausdruck jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht.

$$(\alpha+\beta\lg+\gamma\lg\lg+\ldots)(\alpha'+\beta'\lg+\gamma'\lg^2+\ldots)=$$
$$\alpha\alpha'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\lg+(\alpha\gamma'+\beta\beta'+\alpha'\gamma)\lg^2+\ldots$$

Dies Zahlengebiet kann sofort eine zweite Ausdehnung erhalten, wenn man für $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ complexe Zahlen zulässt, dann unterscheiden sich die zu diesen complexen Zahlen gehörenden Ordnungen von den reellen dadurch, dass die zu den ersten gehörenden Functionen unendlich viele Maxima und Minima haben, und die zu den letzteren gehörenden nicht.

Wenn aber über $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ eine solche Annahme nicht gemacht werden kann, so muss man die Voraussetzung machen, dass man γ so klein machen könne, dass diese Function von ψ in dem Intervall von γ bis 0 stetig ab- oder stetig zunehme. Wir begnügen uns in diesem Falle mit der Behandlung des Integrales für die Grenze $\varrho=1$, also des Integrales $\frac{1}{2}\int_0^\gamma \frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}\,d\psi$, weil man leicht erkennt, dass für $\varrho<1$ um so mehr dies Integral gegen 0 convergirt, wenn dies für $\varrho=1$ der Fall ist, verschieben jedoch diese Untersuchung, bis wir die Function $J(\gamma,\gamma',n)$ behandeln, weil hierzu ganz ähnliche Mittel erfordert werden.

Den Ausdruck

$$\frac{h(\vartheta+0)}{2\pi i}\int_\tau \frac{\xi^{-n}d\xi}{\xi-1}-\frac{h(\vartheta+0)}{2\pi i}\int_{\tau_i}\frac{\xi^{n-1}d\xi}{\xi-1}$$

behandeln wir nun so, dass wir in das erste Integral eine neue Variabele $\xi'=\frac{1}{\xi}$ einführen. Dann entspricht jedem Puncte des Weges a, b, c in der ξ-Ebene ein Punct des Weges a', b'_i, c' in der ξ'-Ebene (einen Augenblick $\gamma=\gamma'$ angenommen), so dass, wenn wir den Strich in ξ' wieder fortlassen, unser Ausdruck übergeht in

$$\frac{h(\vartheta+0)}{2\pi i}\left(\int_{\tau_i}\frac{\xi^{n-1}d\xi}{1-\xi}-\int_{\tau_i'}\frac{\xi^{n-1}d\xi}{1-\xi}\right).$$

Hier können wir in beiden Integralen von dem Puncte $\xi=0$ an den Radius $0a'$ als Integrationsweg hinzunehmen, weil sich die Integrationen über diese Strecke gegenseitig aufheben. Der Weg $0a', b_i, c$ aber kann nach dem Cauchy'schen Satze durch den Radius $0c$, der Weg $0a', b_i', c$ durch den Radius $0c'$ ersetzt werden. Dadurch geht unser Ausdruck in

$$\frac{h(\vartheta+0)}{2\pi i}\left(e^{n\gamma i}\int_0^1\frac{r^{n-1}dr}{1-re^{\gamma i}}-e^{-n\gamma i}\int_0^1\frac{r^{n-1}dr}{1-re^{-\gamma i}}\right)$$

über, also in einen Ausdruck, von welchem pag. 18 in der Anmerkung gezeigt worden ist, dass, wie klein auch γ vorgegeben sei, n immer so gross genommen werden kann, dass er jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht, wobei jedoch n um so grösser sein muss, je kleiner γ ist, so dass dann, aber auch nur

dann, keine Zahl N angegeben werden kann, über welche n nicht zu steigen braucht, damit die Integrale kleiner als eine bestimmte Zahl ε seien, wenn keine Grösse δ angegeben werden kann, unter welche γ unter allen Umständen nicht zu sinken braucht.

Eine ganz gleiche Behandlung, als auf diejenigen Integrale der Function $K(\gamma, \gamma', \varrho, n)$, welche über die Wege τ und τ_1 zu nehmen sind, angewandt wurde, lassen offenbar diejenigen Integrale zu, welche über die Wege τ' und τ'_1 zu nehmen sind, so dass wir nun den Satz aussprechen können:

Die Function $K(\gamma, \gamma', \varrho, n)$ kann jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, wenn ϱ nur nahe genug an 1; γ, γ' klein genug, und n gross genug genommen wird, wobei die Zahl n nur dann grösser und grösser werden muss, wenn irgend ein Umstand γ und *γ' kleiner und kleiner anzunehmen zwingt, damit $K(\gamma, \gamma', \varrho, n)$ seinem absoluten Betrage nach unter einer einer bestimmten beliebig klein vorgegebenen Zahl ε bleibt. Eine Nöthigung, die dann eintritt, wenn ϑ näher und näher an eine Unstetigkeitsstelle von $h(\varphi)$ heranrückt.*

Die Function

$$J(\gamma, \gamma', n) = -\int_{\gamma}^{2\pi-\gamma'} h(\vartheta+\psi) \frac{\sin \frac{2n-1}{2}\psi}{\sin \frac{1}{2}\psi} \frac{d\psi}{2\pi}$$

besitzt nun die Eigenschaft, dass, wie klein auch γ, γ' seien, wenn sie nur nicht Null sind, n immer so gross gewählt werden kann, dass ihr absoluter Betrag jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht.

Da die Function $h(\vartheta+\psi)$ nur in einzelnen Puncten unendlich gross in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Ordnung wird, so ist dies auch mit der Function $h(\vartheta+\psi)\frac{\sin \frac{2n-1}{2}\psi}{\sin \frac{1}{2}\psi}$ der Fall, und man kann daher, was auch n sei*), so kleine, die Puncte, wo die Function ∞ wird, im

*) Wenn die eine Function $h(\varphi)$ an einer Stelle, wo sie unendlich wird, unendlich viele Maxima und Minima hat, so kann sie zuweilen noch integrirt werden, wenn auch die Ordnnng des Unendlichwerdens eine höhere als die erste ist. Dies ist aber dann für wachsende n nicht nothwendig mit der mit $\sin \frac{2n-1}{2}\varphi$ multi-

Innern enthaltende Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots$, aus dem Integrationsintervalle γ bis $2\pi-\gamma'$ ausscheiden, dass die Integrale über diese Intervalle jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, und ebenso ihre Summe, weil ihre Anzahl eine endliche vorgegebene ist. Darauf beruht ja die Integrabilität einer Function, die an einigen Stellen des Integrationsgebietes ∞ wird. Der Rest wird dann, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\vartheta+\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi} \sin\frac{2n-1}{2}\psi \frac{d\psi}{2\pi}$$

sein, wenn wir in den Intervallen 0 bis γ, $\delta_1, \delta_2, \ldots$, $2\pi-\gamma'$ bis 2π die Function $\frac{h(\vartheta+\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi}$ durch 0 ersetzen. Unter dieser Voraussetzung zerlegen wir nun das Intervall von 0 bis 2π in Intervalle von der Länge $\frac{2\pi}{2n-1}$, so dass das Integral in die Summe übergeht

$$\sum_0^{2n-2}{}_{(\mu)} \int_{\mu\frac{2\pi}{2n-1}}^{(\mu+1)\frac{2\pi}{2n-1}} \frac{h(\vartheta+\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi} \sin\frac{2n-1}{2}\psi \frac{d\psi}{2\pi}.$$

In den Intervallen, in welchen μ gerade ist, ist $\sin\frac{2n-1}{2}\psi$ positiv, in den Intervallen, in welchen μ ungerade ist, negativ. Bezeichnen wir nun den grössten Werth von $\frac{h(\vartheta+\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi}$ in dem Intervalle von $\mu\frac{2\pi}{2n-1}$ bis $(\mu+1)\frac{2\pi}{2n-1}$ mit M_μ, den kleinsten mit m_μ, so vergrössert man das Integral, wenn man in den Intervallen, welche zu einem geraden μ gehören M_μ, in denen, welche zu einem ungeraden μ gehören, m_μ für $\frac{h(\vartheta+\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi}$ setzt. Umgekehrt verkleinert man das Integral, wenn man in den geraden Intervallen m_μ, in den ungeraden M_μ für $\frac{h(\vartheta+\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi}$ einsetzt. Im ersten Falle aber erhält man die Summe $\frac{2}{\pi}\sum_0^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{M_{2\mu}}{2n-1} - \frac{2}{\pi}\sum_0^{n-2}{}_{(\mu)}\frac{m_{2\mu+1}}{2n-1}$, im zweiten Falle die Summe

plicirten Function der Fall, und es bedarf dann einer besondern Untersuchung, ob die Fourier'sche Entwickelung anwendbar sei oder nicht.

$\frac{2}{\pi}\sum_0^{n-1}(\mu)\frac{m_{2\mu}}{2n-1} - \frac{2}{\pi}\sum_0^{n-2}(\mu)\frac{M_{2\mu+1}}{2n-1}$ und der Werth des Integrals liegt zwischen diesen beiden. Macht man nun n grösser und grösser, so werden die Differenzen $M_{2\mu} - m_{2\mu+1}$, und $m_{2\mu} - M_{2\mu+1}$ kleiner und kleiner, da wo die Function stetig ist, und es bleiben nur eine bestimmte endliche Anzahl solcher Differenzen endlich, nämlich die zu Intervallen gehören, in denen $h(\vartheta+\psi)$ unstetig ist. Diese endlichen Differenzen durch $2n-1$ dividirt können für sich, und wenn die Puncte, für welche sie stattfinden, keinen endlichen Linientheil ausmachen, auch zusammengenommen, ihrem absoluten Betrage nach offenbar jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen. Schliesst man diese von den Summen aus, so ist der Rest derselben offenbar kleiner als die grösste der Differenzen $M_{2\mu} - m_{2\mu+1}$, welche ihrem absoluten Betrage nach jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen kann, und grösser als die kleinste der Differenzen $m_{2\mu} - M_{2\mu}$, welche mit zunehmendem n ihrem absoluten Betrage nach jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen kann. Demnach kann auch die Function $J(\gamma, \gamma', n)$ mit zunehmendem n jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen.

Hierbei ist zu beachten, dass, wenn irgend ein Umstand γ und γ' kleiner und kleiner zu machen zwingt, dann auch n grösser und grösser genommen werden muss, damit der absolute Betrag von $J(\gamma, \gamma', n)$ unter einer bestimmten kleinen vorgegebenen Zahl ε bleibe, weil dann die Differenzen $M-m$, die Intervallen angehören, in denen auch γ und $2\pi-\gamma'$ liegen, grösser und grösser werden, da ja $\frac{h(\vartheta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ mit abnehmendem γ unendlich wird. Ein andrer Zwang n grösser und grösser zu nehmen, d. h. ein Umstand, der es verbietet, ein bestimmtes n, wie gross es auch sein möge, anzugeben, damit $J(\gamma, \gamma', n)$ seinem absoluten Betrage nach immer unter einer bestimmten kleinen Zahl ε bleibe, könnte vielleicht dadurch herbeigeführt werden, dass die Anzahl der Unstetigkeitsstellen mehr und mehr vergrössert wird, welchen Fall wir hier der Einfachheit halber ausgeschlossen haben.*)

---

*) Ich bemerke, dass wenn eine Function zwar unendlich viele Unstetigkeiten besitzt, aber solche, welche eine Integration noch

Wir sind nun noch den Beweis schuldig, dass

$$\int_0^\gamma [h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)]\,\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}\,d\psi$$

wenn $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ entweder stetig nur ab- oder nur zunimmt, immer mit abnehmendem γ jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht. Um abzukürzen bezeichnen wir den absoluten Betrag von $\frac{h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)}{\sin\frac{1}{2}\psi}\cdot\frac{1}{2}\psi$ mit $g(\psi)$, dann ist $g(\psi)$ eine in dem Intervall von γ bis 0 mit ψ stetig zu Null abnehmende Function. Es bleibt also das Integral zu behandeln

$$\int_0^\gamma g(\psi)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}\,d\psi =$$

$$\sum_0^{m-1}{}_{(\mu)}\int_{\mu\frac{2\pi}{2n-1}}^{\mu+1\frac{2\pi}{2n-1}} g(\psi)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}\,d\psi+\int_{m\frac{2\pi}{2n-1}}^{\gamma} g(\psi)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}\,d\psi,$$

worin m so gewählt ist, dass $m.\frac{2\pi}{2n-1}<\gamma\leqq(m+1)\frac{2\pi}{2n-1}$ ist. Die Function $\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}$ wechselt nun in dem Intervalle $\mu\frac{2\pi}{2n-1}$ bis $(\mu+1).\frac{2\pi}{2n-1}$ ihr Zeichen nicht, und man kann daher, nach dem Satz vom Mittelwerth eines Integrals, wenn $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu \ldots$ Zahlen zwischen 0 und 1 bedeuten, schreiben:

$$\int_0^\gamma g(\psi)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}\,d\psi =$$

$$\sum_0^{m-1}{}_{(\mu)}\, g\left(\frac{\mu+\lambda_\mu}{2n-1}2\pi\right)\int_{\mu\frac{2\pi}{2n-1}}^{(\mu+1)\frac{2\pi}{2n-1}}\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}\,d\psi$$

$$+\,g\left[m\frac{2\pi}{2n-1}+\lambda_m\left(\gamma-m\frac{2\pi}{2n-1}\right)\right]\int_{\frac{2m\pi}{2n-1}}^{\gamma}\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}\,d\psi.$$

---

zulassen, nach Riemann's Untersuchungen die Fourier'sche Entwicklung noch giltig bleibt.

Bezeichnen wir wiederum mit $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots \lambda'_\mu$ Zahlen zwischen Null und Eins, so ist:

$$\int_{\mu\frac{2\pi}{2n-1}}^{(\mu+1)\frac{2\pi}{2n-1}} \frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi} d\psi = \frac{2\pi}{2n-1} \cdot \frac{\sin\frac{2n-1}{2}\frac{(\mu+\lambda'_\mu)2\pi}{2n-1}}{\frac{1}{2}\frac{\mu+\lambda'_\mu}{2n-1}.2\pi} =$$

$$\frac{(-1)^\mu 2\sin\lambda'_\mu\pi}{\mu+\lambda'_\mu},$$

also mit zunehmendem μ eine abnehmende Grösse, woraus leicht hervorgeht, dass das Integral von $\frac{2m\pi}{2n-1}$ bis γ jede Kleinheit erreichen kann, zumal es noch mit einem (beliebig) kleinen Factor behaftet ist, und also bei der Untersuchung fortgelassen werden kann. So haben wir also mit dieser Vernachlässigung

$$\int_0^\gamma g(\psi)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\frac{1}{2}\psi}d\psi = 2\sum_0^{m-1}{}_{(\mu)}(-1)^\mu g\left(\frac{\mu+\lambda_\mu}{2n-1}2\pi\right)\frac{\sin\lambda'_\mu\pi}{\mu+\mu'_\mu},$$

worin die $g\left(\frac{\mu+\lambda_\mu}{2n-1}.2\pi\right)$ und $\sin\lambda'_\mu\pi$ alle positiv sind.

Das erste Glied dieser Summe, für welches $\mu = 0$ ist, ist offenbar $\leqq 2g\left(\frac{\lambda_0\pi}{2n-1}\right)\pi$ und erreicht für sich mit zunehmendem n jeden beliebigen Grad von Kleinheit. In den übrigen Termen der Summe werde $g\left(\frac{\mu+\lambda_\mu}{2n-1}2\pi\right)\sin\lambda'_\mu\pi$ mit η_μ bezeichnet und es bilden dann die η_μ eine mit μ wachsende Grössenreihe, deren grösstes Element η_m ist. Ferner sei $\eta_m-\eta_\mu = \xi_\mu$, dann bilden die ξ_μ eine abnehmende Reihe, deren grösster Term ξ_1 ist. Nun schreiben wir

$$\sum_1^{m-1}{}_{(\mu)}(-1)^\mu\frac{\eta_\mu}{\mu+\lambda'_\mu} = \eta_\mu\sum_1^{m-1}{}_{(\mu)}\frac{(-1)^\mu}{\mu+\lambda'_\mu} - \xi_1\sum_1^{m-1}{}_{(\mu)}\frac{(-1)^\mu\xi_\mu}{\xi_1(\mu+\lambda'_\mu)}$$

und es sind $\frac{\xi_\mu}{\xi_1}$ mit μ abnehmende Grössen, von denen die, welche zu $\mu = 1$ gehört, den Werth 1 hat. $\sum_1^{m-1}{}_{(\mu)}\frac{(-1)^\mu}{\mu+\lambda'_\mu}$ und $\sum_1^{m-1}{}_{(\mu)}\frac{(-1)^\mu\xi_\mu}{\xi_1(\mu+\lambda'_\mu)}$ sind nun Reihen, deren einzelne Terme fort und fort abnehmen und wechselnde Zeichen besitzen, also für

$n = \infty$ noch convergiren, und ihr Werth ist mithin dem absoluten Betrage nach kleiner als ihr erstes Glied. Da diese Summen ausserdem noch mit beliebig kleinen Factoren behaftet sind, (wenn γ klein und n gross genommen wird,) so können sie jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, mithin kann auch

$$\int_0^\gamma g(\psi)\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\psi}d\psi, \text{ mithin} \int_0^\gamma h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}d\psi$$

mit abnehmendem γ und zunehmendem n jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, w. z. b. w.

Setzen wir nun

$$R(\gamma,\gamma',\varrho,n) = F(\varrho)+J(\gamma,\gamma',n)+K(\gamma,\gamma',\varrho,n)-E(\gamma,\gamma',\varrho),$$

so ist nach dem, was bis jetzt über die einzelnen Theile dieser Function bewiesen ist, $R(\gamma,\gamma',n,\varrho)$ eine Function, in der man mit ϱ zur Grenze 1 übergehen kann, (weil sie sich bis dahin stetig mit ϱ ändert,) wodurch sie eine Function wird, die wir mit $R(\gamma,\gamma',n)$ bezeichnen und von welcher der Satz gilt:

Fällt der Werth φ der Variabeln einer Function $h(\varphi)$, welche im Allgemeinen stetig und endlich, und nur in einzelnen Puncten unendlich oder unstetig ist, auf einen Werth ϑ, für welchen $h(\varphi)$ jedenfalls endlich ist, und für welchen $h(\vartheta+0)$ und $h(\vartheta-0)$ beide einen bestimmten Sinn haben, und zu dessen beiden Seiten $lg.lg\,lg\ldots lg^{m-1}.(lg^m)^\alpha$, $(\alpha>1)$, mindestens das Maass der Stetigkeit ist, wenn die Function dort unendlich viele Minima und Maxima hat, im andern Falle aber beliebig ist, so kann man die Winkel γ und γ' zuerst so klein, und dann n so gross nehmen, dass $R(\gamma,\gamma',n)$ jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht.

Die Theile der Function, welche durch Abnehmen der Winkel γ, γ' kleiner und kleiner zu machen sind, sind ein Aggregat von Ausdrücken, welche Grössen von der Form $h(\vartheta+\lambda\gamma)-h(\vartheta+0)$ und $h(\vartheta-\lambda'\gamma')-h(\vartheta-0)$ multiplicirt mit bestimmten endlichen Zahlen enthalten, ausgenommen wenn ϑ auf einen Punct fällt, zu dessen einer Seite oder beiden Seiten die Function unendlich viele Maxima und Minima hat, und ein geringeres Maass der Stetigkeit als $\lg.\lg\lg\ldots\lg^{m-1}.(\lg^m)^\alpha$ $(\alpha>1)$ hat. Von diesem Falle abgesehen, sieht man ein, dass man eine Grösse δ angeben könne, unter welche γ und γ' nicht herabzusinken brauchen, damit der Beitrag dieser Theile kleiner

als eine noch so klein vorgegebene Grösse $\frac{1}{2}\varepsilon$ sei, ausgenommen, wenn ϑ sich einer Unstetigkeitsstelle von $h(\varphi)$ unendlich nähert, weil die Function $h(\varphi)$ da, wo sie stetig ist, auch eine gleichmässig stetige*) Function ist. In diesem Falle kann nach unseren Untersuchungen auch eine bestimmte Zahl N angegeben werden, welche n nicht zu überschreiten braucht, damit dem absoluten Betrage nach $R(\gamma, \gamma', n) < \varepsilon$ sei, indem auch die übrigen Bestandtheile dieser Function ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$ gemacht werden können, ausgenommen wenn ϑ in unmittelbare Nähe einer Unstetigkeitsstelle fällt. Denn eine Nöthigung, n grösser und grösser zu machen, tritt nur dann ein, wenn für gewisse Werthe von ϑ ein Zwang eintritt, γ oder γ' kleiner und kleiner zu machen, da der Fall unendlich vieler Unstetigkeiten ausgeschlossen ist. Rückt aber ϑ näher und näher an eine Unstetigkeitsstelle von $h(\varphi)$, an welcher $h(\varphi)$ unendlich wird oder einen Sprung macht, der nicht viel kleiner ist als ε, so muss nothwendig γ oder γ' kleiner und kleiner genommen werden, und es kann dann bei stetiger Annäherung von ϑ an eine solche Stelle keine Zahl N angegeben werden, über welche n nicht zu steigen braucht, damit dem absoluten Betrage nach $R(\gamma, \gamma', n) < \varepsilon$ bleibt.

Dasselbe scheint auch stattzufinden, wenn ϑ näher und näher an eine Stelle rückt, für welche $h(\varphi)$ unendlich viele Maxima und Minima und ein geringeres Maass der Stetigkeit hat, als die Bezeichnung $\lg . \lg\lg \ldots \lg^{m-1} . (\lg^m)^\alpha$ $(\alpha > 1)$ andeutet.

Schreiben wir nun die Gleichung (C) in die Form

$$\tfrac{1}{2}[h(\vartheta+0) - h(\vartheta-0)] =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi + \sum_1^{n-1}{}_{(\mu)}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos\mu(\vartheta-\varphi)\,d\varphi + R(\gamma, \gamma' n)$$

und nennen eine unendliche Reihe, deren n erste Glieder sich mit wachsendem n einem bestimmten Grenzwerthe so nähern, dass eine bestimmte Zahl N angegeben werden kann, über welche n niemals zu steigen braucht, damit der Rest für alle Werthe der Variabeln der Reihe seinem absoluten Betrage nach kleiner als eine bestimmte Zahl ε bleibe, eine „gleichmässig convergente Reihe" (wie dies seit einiger Zeit Gebrauch

*) Nach der in der Anmerkung pag. 14 gegebenen Definition.

ist), so können wir das Fourier'sche Theorem folgendermaassen aussprechen:

XVIII. *Ist $h(\varphi)$ eine reelle Function von φ, welche in dem Intervall von 0 bis 2π gegeben ist, und nur für einzelne Werthe von φ unstetig oder in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Ordnung unendlich ist, so lässt sich in diesem Intervall*

$$\tfrac{1}{2}[h(\vartheta+0)+h(\vartheta-0)]$$

überall da, wo dieser Ausdruck den Sinn einer bestimmten endlichen Zahl hat, und wo das Maass der Stetigkeit der Functionen $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ oder $h(\vartheta-\psi)-h(\vartheta-0)$ für abnehmende ψ in dem Falle mindestens das der Function $\frac{d}{d\psi}(lg^m\psi)^\alpha$ $(\alpha<0)$ ist, wenn eine dieser beiden Functionen für abnehmende ψ unendlich viele Maxima und Minima haben sollte, in eine unendliche convergente, nach cos. und sin. ganzer Multipla des Bogens ϑ fortschreitende Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_{(\mu)}\cos\mu\vartheta\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos\mu\varphi\,d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_{(\mu)}\sin\mu\vartheta\int_0^{2\pi} h(\varphi)\sin\mu\varphi\,d\varphi$$

*entwickeln, und zwar in eine für alle ϑ gleichmässig convergente Reihe, welche nicht in unmittelbare Nähe einer Unstetigkeitsstelle fallen, oder in die unmittelbare Nähe einer Stelle, wo $h(\varphi)$ unendlich viele Maxima und Minima hat und gleichzeitig das Maass der Stetigkeit unter das der Function $\frac{d}{d\psi}[lg^m(\psi)]^\alpha$, $(\alpha<0)$ herabsinkt.**)

Die Beschränkung, welche wir der Function $h(\varphi)$ auferlegt haben, dass sie für reelle Werthe von φ nur reelle Werthe besitzen solle, kann offenbar fallen gelassen werden, wenn nur der reelle Theil und der imaginäre Theil dieser Function für sich beide den $h(\varphi)$ sonst auferlegten Bedingungen Genüge leisten. Ist also $h(\varphi)=p(\varphi)+iq(\varphi)$, so folgt für die Werthe ϑ von φ, zu deren beiden Seiten p und q stetig sind,

---

*) Dass die Fourier'sche Reihe da, wo sie eine stetige Function darstellt, eine gleichmässig convergente sei, ist zuerst von Herrn E. Heine bemerkt worden.

$$h(\vartheta) = p(\vartheta) + i\,q(\vartheta) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[p(\varphi)+i\,q(\varphi)\,d\varphi] + \frac{1}{\pi}\sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\int_0^{2\pi}[p(\varphi)+i\,q(\varphi)]\cos\mu(\vartheta-\varphi)d\varphi$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{+n}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,e^{\mu(\vartheta-\varphi)i}\,d\varphi.$$

Ist aber $h(\varphi) = \omega(Re^{\varphi i}) = \omega(\xi)$, und $\omega(\xi)$ eine Function, welche im Innern eines um den Nullpunct mit dem Radius R gezogenen Kreises C den Charakter $f(\xi)$ hat. so kann man, wenn $x = Re^{\vartheta i}$ gesetzt wird, hiernach schreiben,

$$\omega(Re^{\vartheta i}) = \lim_{n=\infty}\sum_{-n}^{+n}{}_{(\mu)}\frac{x^\mu}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi^{\mu+1}}$$

oder, da nach dem Cauchy'schen Satze alle die Glieder, für welche $\mu \leqq -1$ ist, Null sind:

$$\omega(Re^{\vartheta i}) = \lim_{n=\infty}\sum_0^{n}{}_{(\mu)}\frac{x^\mu}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi^{\mu+1}},$$

eine Entwicklung, die vollständig mit der Mac Laurin'schen (Satz XIV.) übereinstimmt. Hieraus folgt der wichtige Satz:

XIX. *Hat eine Function $\omega(x)$ im Innern eines Kreises um den Punct 0 den Charakter $f(x)$ und wird am Rande nur in einzelnen Puncten unendlich gross in einer um ein Angebbares*) niederen als der ersten Ordnung, ist aber sonst am Rande stetig, so convergirt die Summe der ersten n Glieder der Mac Laurin'schen Reihe, welche $\omega(x)$ im Innern darstellt für alle Puncte des Randes (Convergenz-Kreises), für welche $\omega(x)$ nicht unendlich wird, mit wachsendem n gegen den Werth $\omega(x)$.***)

---

*) Eine Ordnung, die um ein Angebbares kleiner ist, als eine andere, ist hier immer eine solche, welche durch eine Potenz gemessen wird, so dass die Ordnung des Unendlichwerdens von $\frac{1}{x \lg x}$ nicht um ein Angebbares kleiner ist als die erste.

**) Hierbei müssen solche Puncte ausgenommen werden, für welche $\omega(\xi)$ zwar endlich und stetig ist, aber längs des Kreises C unendlich viele Maxima und Minima und gleichzeitig ein geringeres Maass der Stetigkeit hat, als durch die Bezeichnung $\lg.\lg\lg\ldots(\lg^m)^\alpha$, $(\alpha > 1)$, bestimmt wird. Wenigstens ist für solche Puncte hier der Beweis der Convergenz nicht geliefert.

Dieser Satz lässt sich sofort durch Verlegung des Coordinatensystems auf die Taylor'sche Entwicklung ausdehnen.

Was nun die Frage betrifft, ob eine in die Fourier'sche Reihe entwickelbare Function $h(\vartheta)$ sich nur auf eine Weise durch eine da, wo $\frac{1}{2}h(\vartheta+0)+\frac{1}{2}h(\vartheta-0)$ endlich ist, convergente trigonometrische Reihe darstellen lasse, so ist es schwer eine durchaus befriedigende Antwort zu ertheilen, weil in einer ungleichmässig convergenten Reihe die Summe der Integrale der einzelnen Terme nicht nachweislich gleich dem Integral der Reihe ist. Herr E. Heine wird in einem Aufsatze, welchen er demnächst veröffentlichen wird, die gestellte Frage mit dem unter XX. folgenden Satze beantworten, welchen hier abzudrucken mir derselbe gütigst gestattet hat.

XX. *Eine im Allgemeinen stetige und einwerthige, nicht nothwendig überall endliche Function $f(\vartheta)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine nach cos. und sin. ganzer Multipla des Bogens ϑ fortschreitende Reihe entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im Allgemeinen gleichmässig zu convergiren. Die Reihe ist nicht überall, sondern nur im Allgemeinen gleich dem Werth der entwickelten Function.*

Denn in der That stellt ja die Reihe den Mittelwerth zwischen $h(\vartheta+0)$ und $h(\vartheta-0)$ dar, der da, wo $h(\vartheta)$ unstetig ist, mit $h(\vartheta)$ nicht übereinstimmt. Herr Heine wird übrigens zeigen, dass die Coefficienten einer so convergenten Reihe mit wachsendem Stellenzeiger nothwendig gegen 0 convergiren.

Dass auch trigonometrische Reihen mit endlich bleibenden Coefficienten in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft convergiren können, dass eine solche Reihe zuweilen auch Functionen, welche in einer höhern als der ersten Ordnung unendlich werden oder unendlich oft unstetige Functionen darstellen könne, und einige andere interessante Eigenschaften derselben findet man in Riemann's Habilitationsschrift „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.“

Wir kehren nun zu den Functionen einer complexen Variabeln zurück.

XXI. *Eine Function $\omega(x)$, welche in der ganzen x-Ebene den Charakter $f(x)$ hat, ausser für $x=\infty$, wo $\omega(x).x^{-n}$ den Charakter $f(x)$ hat, ist eine ganze Function von x vom Grade n.*

Dass n nothwendig eine ganze Zahl ist, folgt aus dem Satz X. Entwickelt man nun $\omega(x)$ nach Mac Laurin (Satz XIV.) in die Reihe:

$$\omega(x) = \omega(0) + \omega'(0)x + \frac{\omega''(0)}{1.2}x^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{\omega^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{n+1}\int \frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi^{n+1}(\xi - x)},$$

wobei die Integration über einen beliebig grossen Kreis erstreckt werden kann, so ist $\frac{\omega(\xi)}{\xi^n}$ eine Function von ξ, deren absoluter Betrag nicht über eine bestimmte Grösse M steigt, wenn der Radius R des Integrationskreises noch so gross genommen wird, weil ja für $\xi = \infty$ der Ausdruck endlich bleibt. Es wird aber das Integral

$$\int \frac{\omega(\xi)}{\xi^n} \cdot \frac{d\xi}{\xi.(\xi - x)} = i\int_0^{2\pi} \frac{\omega(Re^{\varphi i})}{(Re^{\varphi i})^n} \cdot \frac{d\varphi}{(Re^{\varphi i} - x)}$$

seinem absoluten Betrage nach vergrössert, wenn man $\frac{\omega(Re^{\varphi i})}{(Re^{\varphi i})^n}$ durch den grössten absoluten Betrag dieser Function also durch M, und $\frac{1}{Re^{i\varphi} - x} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{e^{i\varphi} - \frac{x}{R}}$ durch seinen grössten absoluten Betrag, also durch $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{1}{R - r}$ ersetzt, worin r der absolute Betrag von x ist, und ist also kleiner als $\frac{2\pi i}{R - r}M$ und demnach kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, weil R beliebig gross gemacht werden kann; also Null. Folglich ist $\omega(x)$ eine ganze Function vom $n$ten Grade, w. z. b. w.

XXII. *Ist $\omega(x)$ eine Function, welche in der ganzen Ebene den Charakter $f(x)$ hat, ausser in einzelnen Puncten $u, u', u'', \dots$, wo sie in der n^{ten}, n'^{ten}, n''^{ten}, ... Ordnung unendlich wird, so ist $\omega(x)$ eine rationale Function von x.*

Es ist nämlich $\omega(x).(x - u)^n.(x - u')^{n'}.(x - u'')^{n''}\dots$ eine Function, die in der ganzen Ebene den Charakter $f(x)$ hat, ausser für $x = \infty$, wo sie in einer endlich hohen Ordnung unendlich wird, und demnach eine ganze Function von x, woraus der zu beweisende Satz folgt.

XXIII. Partialbrüche. *Eine Function $\omega(x)$, welche im Innern eines Stückes „S" den Charakter $f(x)$ hat, ausser in den Puncten $u, u', u'', \ldots$, wo sie so unendlich wird, dass bez. $\omega(x)(x-u) = U$, $\omega(x)(x-u') = U'$, $\omega(x)(x-u'') = U''$, ... für $x = u, u', u'', \ldots$ wird, und $U, U', U'', \ldots$ endliche Grössen sind, kann in der Form dargestellt werden*

$$\omega(x) = \frac{U}{x-u} + \frac{U'}{x-u'} + \frac{U''}{x-u''} + \cdots,$$

wenn $\int \frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi - x}$ über die ganze Begrenzung s von S erstreckt, den Werth 0 hat.

Es ist nämlich nach Satz IV.

$$\int_s \frac{\omega(\xi)}{x-\xi}\frac{d\xi}{2\pi i} = \omega(x) + \sum_{(u)} \int \frac{\omega(\xi)}{\xi - x}\frac{d\xi}{2\pi i},$$

wenn die Integrationen der über alle Puncte $u, u', u'' \ldots$ zunehmenden Summe über die natürlichen Begrenzungen dieser Puncte erstreckt werden. Schreibt man nun

$$\int \frac{\omega(\xi)}{\xi - x}\frac{d\xi}{2\pi i} = \int \frac{\omega(\xi).(\xi-u)}{2\pi i(\xi - x)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - u},$$

so hat $\frac{\omega(\xi)(\xi-u)}{\xi - x}$ im Innern der natürlichen Begrenzung von u, über welche die Integration zu erstrecken ist, den Charakter $f(\xi)$ und das Integral den Werth $\frac{U}{u-x}$ in Gemässheit des Satzes VIII. Wenn nun das über s erstreckte Integral verschwindet, so hat man demnach

$$\omega(x) + \sum \frac{U}{u-x} = 0 \quad \text{oder} \quad \omega(x) = \sum \frac{U}{x-u}$$

w. z. b. w.

XXIV. Produktentwicklung. *Wird eine Function $\omega(x)$ im Innern eines Stückes „S" in den Puncten $u, u', u'', \ldots$ unendlich gross bez. in der n^{ten}, n'^{ten}, n''^{ten}, ... Ordnung, und in den Puncten $v, v', v'', \ldots$ unendlich klein bez. in der m^{ten}, m'^{ten}, m''^{ten}, ... Ordnung, und hat sonst in S den Charakter $f(x)$, und hat das Integral*

$$\int \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}\frac{d\xi}{\xi - x}$$

über die ganze Begrenzung s von S erstreckt, den Werth 0, so findet für alle im Innern von S liegende Puncte x_0 und x die Gleichung statt:

$$\frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} = \frac{\left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^m}{\left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^n} \cdot \frac{\left(\frac{x-v'}{x_0-v'}\right)^{m'}}{\left(\frac{x-u'}{x_0-u'}\right)^{n'}} \cdot \frac{\left(\frac{x-v''}{x_0-v''}\right)^{m''}}{\left(\frac{x-u''}{x_0-u''}\right)^{n''}} \cdots\cdots$$

Wendet man nämlich die Partialbruchentwicklung auf die Function $\frac{d \lg \omega(x)}{dx} = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = W(x)$ an, so haben wir unter der Voraussetzung, dass

$$\int_s \frac{W(\xi)}{\xi - x} d\xi = \int_s \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - x}$$

verschwindet, und dass die Grössen

$$U = \lim_{x=u} W(x)(x-u), \quad U' = \lim_{x=u'} W(x)(x-u'), \ldots$$

$$V = \lim_{x=v} W(x)(x-v), \quad V' = \lim_{x=v'} W(x)(x-v'), \ldots$$

endliche Grössen sind, nach XXIII.

$$W(x) = \sum \frac{U}{x-u} + \sum \frac{V}{x-v} = \frac{d \lg \omega(x)}{dx},$$

woraus durch Integration zwischen x_0 und x hervorgeht

$$\int_{x_0}^{x} W(x) dx = \int_{x_0}^{x} d \lg \omega(x) = \lg \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)}$$

$$= \sum_{(v)} \lg \left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^V + \sum_{(u)} \lg \left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^U + 2k\pi i,$$

worin k eine lineare Function von $U, U', \ldots, V, V', \ldots$ mit ganzzahligen Coefficienten ist, die daher rührt, dass über den Integrationsweg nichts festgesetzt ist, und $\int \frac{U}{x-u} dx$, $\int \frac{V}{x-v} dx$ um $2\mu U\pi i$ bez. $2\nu V\pi i$ wachsen, wenn die Wege μ mal um u, ν mal um v herumgeführt werden. Nun ist aber

$$\frac{d \lg \omega(x)}{dx} = \frac{d \lg [\omega(x)(x-u)^n]}{dx} - \frac{d \lg (x-u)^n}{dx} = \chi(x) - \frac{n}{x-u},$$

und $\chi(x)$ eine Function von x, welche in der Umgebung von u den Charakter $f(x)$ hat, also

$$\lim_{x=u} W(x)(x-u) = \lim_{x=u} [\chi(x)(x-u) - n] = -n = U.$$

Ferner

$$\frac{d \lg \omega(x)}{dx} = \frac{d \lg [\omega(x)(x-v)^{-m}]}{dx} + \frac{d \lg (x-u)^m}{dx} = \psi(x) + \frac{m}{x-v},$$

worin $\psi(x)$ in der Umgebung von v den Charakter $f(x)$ hat, mithin

$$\lim_{x=v} W(x)(x-v) = \lim [\chi(x)(x-v)+m] = m = V.$$

Mithin ist

$$\lg \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} = \sum_{(v)} \lg \left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^m - \sum_{(u)} \lg \left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^n + 2k\pi i,$$

worin nun k eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Geht man nun vom Logarithmus zum Numerus über, so folgt

$$\frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} = \frac{\prod\limits_{(v,m)} \left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^m}{\prod\limits_{(u,n)} \left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^n},$$

w. z. b. w.

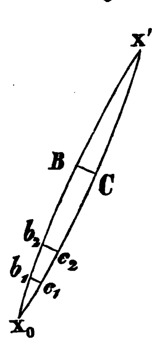
In allen bisher über eine Function der complexen Variabeln x ausgesprochenen Sätzen ist vorausgesetzt worden, dass diese Function in dem Gebiete, in welchem sie betrachtet wird, eindeutig bestimmt sei, oder, wie man sagt, dass sie eine einwerthige Function von x sei. Sollen diese Sätze Anwendung auf mehrwerthige Functionen, wie $\sqrt{x}$, $\lg x$, etc. finden, so muss die Mehrdeutigkeit für Gebiete, in welchen sie betrachtet werden sollen, in irgend welcher Weise beseitigt werden. Dies geschieht nach Riemann durch Zerlegung mehrwerthiger Functionen in einwerthige Zweige. Die Werthe einer mehrwerthigen Function sind im Allgemeinen für ein bestimmtes x um ein Endliches von einander verschieden, und nur in einzelnen Puncten fallen zwei oder mehrere Werthe zusammen, oder werden gleichzeitig unendlich gross. Denn fielen die Werthe längs eines noch so kleinen Linienstückes zusammen, so müssten sie nach Satz XV. überhaupt zusammenfallen, wenn anders eine Fortsetzung als Function der complexen Variabeln x möglich ist. Es findet aber diese Singularität für einzelne Puncte z. B. bei der zweiwerthigen Function $\sqrt{x}$ für $x = 0$ und für $x = \infty$ statt. Verbindet man nun alle die Puncte der x-Ebene, für welche von den verschiedenen Werthen einer mehrdeutigen Function $\omega(x)$ zwei oder mehrere zusammenfallen, durch eine Linie q, welche die Ebene nicht in getrennte Stücke zerlegt und demnach weder geschlossen sein, noch sich selbst irgendwo schneiden darf, so wird dadurch, dass man die beiden Ufer der Linie als Begrenzung der Ebene ansieht, von der Ebene kein

Theil ausgeschlossen, sondern nur der Bewegung eines Punctes in derselben eine gewisse Schranke gesetzt. Wählt man dann für einen bestimmten Punct der Ebene von den verschiedenen Werthen von $\omega(x)$ einen aus, so wird über die stetige Fortsetzung der Function (wenn solche möglich ist) von dieser Stelle aus durch die ganze x-Ebene nirgend ein Zweifel entstehen, wenn nur die Fortsetzung über keinen Theil der Linie q hinweg geschieht. Ist an der Stelle $x = x_1$ $\omega(x) = X_1 = \omega(x_1)$ aus den als verschieden vorausgesetzten Werthen $X_1, X_1', X_1'', \ldots X_1^{(n)}$ ausgewählt, und hat für $x = x_2$ $\omega(x_2)$ die Werthe $X_2, X_2', X_2'', \ldots X_2^{(n)}$, und liegt x_2 nicht auf q, so sind diese Werthe alle um eine Grösse von einander verschieden, deren Norm eine bestimmte angebbare Zahl, etwa 2δ, jedenfalls übersteigt, weil nur für Puncte der Linie q die verschiedenen Werthe von $\omega(x)$ unendlich wenig von einander verschieden sein können. Man wird aber den Punct x_2 so nahe an x_1 rücken können, wenn anders $\omega(x)$ dort stetig ist, dass die Werthe $X_2, X_2', X_2'', \ldots X_2^{(n)}$ denen $X_1, X_1', X_1'', \ldots X^{(n)}$ so zugeordnet werden können, dass die Differenzen $X_2 - X_1, X_2' - X_1', \ldots X_2^{(n)} - X_1^{(n)}$ ihrem absoluten Betrage nach dort kleiner als δ sind, während der absolute Betrag der übrigen Differenzen $X_2' - X_1, X_2'' - X_1$, etc. grösser als δ ist, wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit von $X_1, X_1', X_1'', \ldots X_1^{(n)}$. Demnach schliesst sich nur ein einziger Werth X_2 an den Werth X_1 stetig an, und es ist daher die stetige Fortsetzung von $\omega(x)$ eindeutig bestimmt. Hieraus ergiebt sich zur Festlegung eines eindeutigen Zweiges einer mehrwerthigen, im Allgemeinen stetigen, nur da, wo sie unendlich wird, unstetigen, Function folgende Regel:

XXV. *Um eine mehrwerthige Function der complexen Variabeln x in einwerthige Zweige zu zerlegen, verbinde man alle diejenigen Puncte, für welche von den verschiedenen Werthen von $\omega(x)$ zwei oder mehrere einander gleich oder gleichzeitig unendlich werden, durch eine die x-Ebene nicht zerstückelnde Linie q, wähle dann für einen Punct x_0 einen der verschiedenen Werthe von $\omega(x_0)$ etwa X_0 aus, und betrachte für $x = x'$ denjenigen Werth von $\omega(x')$ als zu demselben Zweige wie $\omega(x_0) = X_0$ gehörend, welchen man dadurch erhält, dass man eine, die Linie q nirgend überschreitende Linie s von x_1 nach x' zieht und nun mit stetigem Vorrücken der Varia-*

beln x längs s gleichzeitig die stetige Aufeinanderfolge der Werthe $\omega(x)$ bildet, bis man zu dem Werthe $\omega(x')$ gelangt.

Geht man von x_0 nach x' auf zwei einander sehr nahe liegenden Wegen x_0Bx', x_0Cx', welche beide die Linie q nirgend überschreiten, und zerlegt diese Wege in sehr kleine Elemente, deren Endpuncte $b_1, b_2, \ldots$, von den entsprechenden $c_1, c_2, \ldots$ sehr wenig entfernt sind, so wird man durch stetige Fortsetzung der Function $\omega(x)$ von dem Werthe $\omega(x_0)$ in b_1 zu demselben Werthe gelangen auf dem Wege x_0b_1, als auf dem Wege $x_0c_1b_1$, da sich die beiden Werthe wegen der Stetigkeit der Function $\omega(x)$ nur sehr wenig von einander unterscheiden könnten, aber Werthe von $\omega(x)$, die sich beliebig wenig von einander unterscheiden, im Puncte b_1 nicht vorhanden sind, weil dies nur für einzelne Puncte der Linie q statt hat.



Geht man nun von b_1 nach b_2 einmal direct, ein andermal über c_1c_2 nach b_2, so wird man aus demselben Grunde in b_2 beidemale zu einem und demselben Werthe von $\omega(x)$ gelangen, d. h. also in b_2 auf dem Wege x_0, b_1, b_2 zu demselben Werthe als auf dem Wege $x_0, c_1, b_1, c_1, c_2, b_2$, oder da der Schritt c_1, b_1 vor- und wieder zurückgethan wird, auf dem Wege x_0, c_1, c_2, b_2. Hieraus ergiebt sich durch successive Anwendung derselben Schlussweise, dass man auf dem Wege x_0, B, x' und x_0, C, x' durch stetige Fortsetzung von $\omega(x)$ zu einem und demselben Werthe in x' gelangt. Dasselbe gilt natürlich auch für Wege, die ein beliebiges, einfach zusammenhangendes Ebenenstück einschliessen, aber kein Stück der Linie q enthalten, weil man diese Wege durch allmälige sehr geringe Veränderung ihrer Gestalt in einander übergehen lassen kann. In Folge hiervon heisst die Function $\omega(x)$ in dem durch q beschränkten Gebiete auch einändrig oder monodrom.

Zu beiden Seiten der Linie q wird aber ein Zweig der Function $\omega(x)$ im Allgemeinen von einander um ein Endliches verschiedene Werthe annehmen, also unstetig sein, wenngleich die Function eine stetige Fortsetzung über diese Linie hinaus zulässt, welche Fortsetzung dann Werthe liefert, die einem zwei-

ten Zweige der Function angehören. Die Zweige einer stetigen Function aber setzen sich längs Linien in einander stetig fort.

XXVI. Verzweigungspuncte. *Fallen in einem Puncte zwei oder mehrere Werthe der mehrwerthigen Function $\omega(x)$ zusammen (so dass die im Allgemeinen n-werthige Function dort weniger als n verschiedene Werthe hat,) und ist ihr Werth auf dem einen Ufer einer von ihr ausgehenden Linie um ein Endliches verschieden von dem Werthe der stetigen Fortsetzung der Function auf dem andern Ufer dieser Linie, wenn diese Fortsetzung längs der natürlichen Begrenzung des Punctes geschieht, so heisst dieser Punct ein Verzweigungspunct der Function $\omega(x)$.*

Um nun die bei mehrwerthigen Functionen auftretenden Verhältnisse näher an einem speciellen Beispiele kennen zu lernen, betrachten wir die zweiwerthige, für die Theorie der elliptischen Functionen besonders wichtige Function

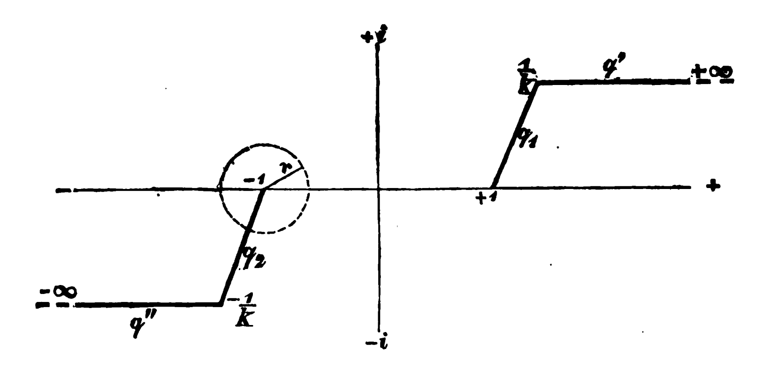
$$R(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Die Puncte der x-Ebene, für welche die beiden im Allgemeinen verschiedenen Werthe von $R(x)$ in einen zusammenfallen, oder gleichzeitig unendlich werden, sind

$$x = 1,\ -1,\ \frac{1}{k},\ -\frac{1}{k},\ \infty.$$

Deshalb ziehen wir von 1 nach $\frac{1}{k}$ eine Gerade q_1 und ebenso eine Gerade q_2 von $-\frac{1}{k}$ bis -1, und von $\frac{1}{k}$ eine, etwa der positiven reellen Achse parallele Gerade q' ins Unendliche ($+\infty$), und von $\frac{-1}{k}$ eine, etwa der negativen x-Achse parallele Gerade q'' ins Unendliche ($-\infty$). Wir denken uns aber die x-Ebene als die Oberfläche einer Kugel, deren Radius über alle Grenzen gross ist, so dass die Ebene als eine geschlossene Oberfläche anzusehen ist, welche einen und nur einen unendlich fernen Punct besitzt. Die Berechtigung hierzu entspringt daraus, dass die Stelle $x = \infty$ durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi - a}$ auf einen einzigen Punct a bezogen wird, in welcher Richtung man auch x ins Unendliche rücken lässt. Bei dieser Vorstellung treffen die Linien q' und q'' im unendlich fernen Puncte zu-

sammen, und es bilden q_1, q', q'', q_2 zusammen einen einzigen continuirlichen Zug, der mit q bezeichnet werden soll, welcher die x-Ebene nicht zerstückelt. — Will man diese Vorstellung der Ebene nicht benutzen, so muss man q', q'' durch einen unendlich grossen Halbkreis geschlossen denken, was jedoch weit weniger bequem ist. — Nun definiren wir einen Zweig $R_1(x)$ so, dass für $x=0$ $R(x)$ den Werth 1 hat



$[R_1(0)=1]$, den andern so, dass für $x=0$ $R(x)$ den Werth -1 hat $[R_2(0)=-1]$, und dass die stetigen Fortsetzungen von $R_1(x)$ und $R_2(x)$ nirgend über die Linie q hinweg geschehen. Die beiden Zweigwerthe von $R(x)$, also $R_1(x)$ und $R_2(x)$ unterscheiden sich in jedem Puncte durch das Vorzeichen. Setzen wir den Zweig

$$R_1(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},\quad R_1(0)=1$$

stetig fort, ohne die Linie q zu überschreiten, so ist dieser Zweig überall völlig bestimmt. Um die Werthunterschiede dieses Zweiges zu beiden Seiten der Linie q_2 kennen zu lernen, setzen wir einen Augenblick $1+x=re^{\vartheta i}$, also $R_1(x)=r^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{\vartheta i}{2}}.\sqrt{(1-x)(1-k^2x^2)}$, und betrachten die Function nur für so kleine r, dass ein mit r um den Punct -1 als Mittelpunkt geschlagener Kreis dessen natürliche Begrenzung bildet, worunter hier zu verstehen ist, dass keiner der Punkte $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, 1 im Innern des Kreises enthalten ist. Für $\vartheta=0$ ist $x=-1+r$, und da dort der Zweigwerth von $R_1(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ völlig bestimmt ist, so ist auch der Zweig-

werth der Function $\sqrt{(1-x).(1-k^2x^2)}$ völlig bestimmt. (Ist k reell und kleiner als 1, so hat $R_1(x)$ dort einen positiven reellen Werth.) Diese zweiwerthige Function hat im Innern der natürlichen Begrenzung des Punctes -1 keine Stelle, für welche ihre beiden Werthe zusammenfielen, und hat für alle Puncte der Peripherie des Kreises r, insofern sie stetig fortgesetzt wird, nur einen Werth. Hingegen nimmt der Factor $r^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{\vartheta i}{2}}$, wenn man von $\vartheta = 0$ aus ϑ dadurch stetig ändert, dass man einmal in positiver, einmal in negativer Richtung auf der Peripherie bis zu dem Puncte $x = -1 + re^{\vartheta_1 i}$ vorgeht, in positiver Richtung den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta_1 i}{2}}$, in negativer Richtung den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}(\vartheta_1-2\pi)i}$ $= -r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_1 i}$ an. Damit die Linie q_2 nicht überschritten werde, darf für $x = -1 + re^{\vartheta_1 i}$ nur ein Punct gewählt werden, nämlich der, welcher auf q_2 liegt, und es folgt aus dieser Betrachtung, dass der Zweig $R_1(x)$ für die Puncte des einen Ufers von q_2 Werthe besitze, welche sich von denen für die auf dem andern Ufer gegenüberliegenden Puncte durch das Vorzeichen, mithin da, wo $R_1(x)$ nicht 0 ist, um eine endliche Grösse unterscheiden. Dies findet wegen der Stetigkeit der Function $R_1(x)$ längs der ganzen Linie q_2 statt. (Ist k reell und kleiner als 1, so ist $\vartheta_1 = \pi$ und R_1 hat auf dem Ufer, welches für die Richtung von $\frac{-1}{k}$ bis -1 das linke ist, positive rein imaginäre, auf dem andern Ufer negative imaginäre Werthe.) Setzt man $R_1(x)$ über die Linie q_2 stetig fort, so gelangt man zu den Werthen des Zweiges

$$R_2(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad R_2(0) = -1.$$

Setzen wir nun $R_1(x)$ stetig auf den beiden Ufern von q_2 fort, bis in die Nähe von $-\frac{1}{k}$ und setzen wiederum einen Augenblick $x = -\frac{1}{k} + re^{\vartheta i}$ und nehmen r so klein, dass ein um $-\frac{1}{k}$ als Mittelpunkt mit dem Radius r geschlagener Kreis dessen natürliche Begrenzung bildet, so ist auf diesem Kreise $R_1(x) = r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta i}{2}}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$ und die beiden Werthe auf den verschiedenen Ufern von q_2, wenn dort $\vartheta = \vartheta_1$ ist,

sind $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta_1 i}{2}}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$ und $-r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta_1 i}{2}}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$ auf den beiden Ufern von q'', wenn dort $\vartheta = \vartheta_2$ ist, hat $R_1(x)$ die Werthe $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_2 i}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x)k}$ und $-r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}(\vartheta_2-2\pi)i}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k} = r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_2 i}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$, weil man auf das eine Ufer durch eine positive Drehung um $\frac{1}{k}$ von ϑ_1 aus gelangt, und hat somit auf beiden Ufern einen und denselben Werth. Dasselbe findet wegen der Stetigkeit von $R_1(x)$ längs der ganzen Linie q'' statt. (Ist k reell und kleiner als 1, so ist $\vartheta_2 = \pi$, $\vartheta_1 = 0$, woraus folgt, dass für reelle Werthe von x, welche $< \frac{-1}{k}$ sind, $R_1(x)$ negativ reell ist.) Da sich aber über diese Linie hinweg $R_1(x)$ stetig in sich selbst fortsetzt, so kann q'' ganz fortgelassen werden, ohne dass der Zweig $R_1(x)$ aufhört bestimmt zu sein. Eine ganz gleiche Betrachtung ergiebt, dass $R_1(x)$ zu beiden Seiten der Linie q_1 durch das Vorzeichen von einander verschiedene Werthe besitzt, und sich über q_1 hinweg stetig in den Zweig $R_2(x)$ fortsetzt, hingegen über die Linie q' sich stetig in sich selbst fortsetzt, so dass auch q' fortgelassen werden kann. (Für reelle $k < 1$ ist $R_1(x)$ für reelle $x < 1$ positiv reell, für reelle x zwischen 1 und $\frac{1}{k}$ auf dem positiven Ufer von q_1 negativ imaginär, für reelle $x > \frac{1}{k}$ aber negativ reell.)

Ganz dasselbe gilt nun auch für den Zweig $R_2(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, $R_2(0) = -1$, so dass jeder Zweig eine vollständig bestimmte Function der x-Ebene ist, wenn man diese durch die Linien q_1 und q_2 begrenzt, und zwar nehmen diese Functionen jede zu beiden Seiten von q_1 und q_2 um ein Endliches von einander verschiedene Werthe an. Die vier Puncte $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ sind Verzweigungspuncte der zweiwerthigen Function $R(x)$, weil für sie die Werthe $R_1(x)$ und $R_2(x)$ zusammenfallen und in jeden eine Linie einläuft, über welche hinweg ein Zweig sich unstetig ändert. Für $x = \infty$ hingegen findet keine Verzweigung statt, obgleich dort beide Zweige unendlich werden. Denn führt man die Variabele x über einen so grossen Kreis, dass er als die natürliche Be-

grenzung des Punctes $x = \infty$ angesehen werden kann, so nimmt jeder Zweig $R_1(x)$ und $R_2(x)$, wenn man ihn längs dieses Kreises stetig fortsetzt, überall nur einen einzigen Werth an.

Jede rationale Function von x und $R(x)$ ist wie $R(x)$ verzweigt. Das heisst, ein Zweig einer solchen Function ist völlig bestimmt, wenn man die x-Ebene durch die Linien q_1 und q_2 begrenzt, und die Werthe der Function, wie sie den einzelnen Zweigen angehören sollen, für einen bestimmten Punct, etwa für $x = 0$, angiebt. Denn eine rationale Function von x und $R(x)$ kann sich über Linien hinweg nur da unstetig ändern, wo dies mit $R(x)$ der Fall ist, und nimmt für jedes gegebene Werthpaar $[x, R(x)]$ nur einen einzigen Werth an. Sollten daher für bestimmte von ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ verschiedene Puncte x die beiden Werthe jener Function zusammenfallen, so kann doch in diese keine Linie einlaufen, zu deren beiden Seiten die stetige Fortsetzung der Function um ein Endliches von einander verschiedene Werthe besässe, in welcher Linie für ein einziges Werthepaar $[x, R(x)]$ zwei verschiedene Werthe vorhanden sein würden.

Umgekehrt ist auch eine wie $R(x)$ verzweigte, ausser in einzelnen Puncten, wo sie ∞ wird, stetige Function der complexen Variabeln x, d. h. eine Function, die für jedes gegebene Werthepaar $[x, R(x)]$ nur einen Werth annimmt, eine rationale Function von x und $R(x)$. Von einer solchen Function versteht es sich von selbst, dass ihre Zweige einwerthige Functionen der x-Ebene sind, wenn diese durch die Linien q_1 und q_2 begrenzt wird, weil dadurch die Zweige von $R(x)$ bestimmt sind.

Die zu untersuchende Function sei s, die Werthe, welche sie für die Werthepaare $[x, R_1(x)]$, $[x, R_2(x)]$ haben, seien bez. s_1 und s_2. Dann sind $s_1 + s_2$ und $s_1 . s_2$ einwerthige Functionen der complexen Variabeln x in der ganzen x-Ebene, weil diese Functionen in Bezug auf R_1 und R_2 symmetrisch sind. Deshalb sind sie nach Satz XXII. rationale Functionen von x, etwa $2g(x)$ und $h(x)$. Es wird aber $(s-s_1)(s-s_2) = s^2 - 2g(x)s + h(x)$ der Null gleich, wenn s einen der beiden Werthe s_1 oder s_2 annimmt, und mithin ist s die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grade mit rationalen Coefficienten, oder es ist

$$s - g(x) = \pm \sqrt{g^2(x) - h(x)},$$

also s vermindert um eine rationale Function, (welche Differenz offenbar wiederum eine wie $R(x)$ verzweigte Function sein muss, weil die rationale Function $g(x)$ für jedes Werthepaar $[x, R(x)]$ nur einen Werth annimmt), ist die Quadratwurzel einer rationalen Function. Diese kann sich aber von $R(x)$ nur durch einen rationalen Factor unterscheiden. Denn bringt man die Quadratwurzel auf die Form $p(x).\sqrt{q(x)}$, worin $q(x)$ eine ganze Function ist, deren Linearfactoren nur einfach vorkommen, was immer möglich ist, so kann $q(x)$ keinen andern Factor als $x-1$, $x+1$, $xk-1$, $xk+1$ besitzen. Denn besässe $q(x)$ noch den Factor $x-\alpha$, so würde in $\sqrt{x-\alpha}.\sqrt{\frac{q(x)}{x-\alpha}}$ der erste Factor verschiedene Werthe annehmen, wenn man x um α in positiver und negativer Richtung herum nach einem Puncte führt, wie man (nach der pag. 61 angewendeten Methode) sofort erkennt, wenn man $re^{\vartheta i}$ für $x-\alpha$ setzt. Der zweite Factor aber bleibt ungeändert, weil in der Umgebung von α nicht zwei Werthe derselben zusammenfallen, er also dort einändrig ist. Demnach würde $s-g(x)$, also auch s, in jenem Puncte für ein einziges Werthepaar $[x, R(x)]$ — weil $R(x)$ nicht aus einem Zweig in den andern übergeht, wenn x um α geführt wird, — zwei verschiedene Werthe besitzen, was gegen die Voraussetzung ist. Es kann aber auch, wenn nicht $q(x) = \text{Const.}$ ist, keiner der Factoren $x-1$, $x+1$, $x-\frac{1}{k}$, $x+\frac{1}{k}$ fehlen. Denn fehlte z. B. der Factor $x-1$, so würde $\sqrt{q(x)}$ seinen Werth nicht ändern, wenn man x über die natürliche Begrenzung des Punctes 1 herumführte, weil innerhalb derselben nicht zwei Werthe von $\sqrt{q(x)}$ zusammenfallen. Da aber hierbei R_1 in R_2 übergegangen ist, so würde für alle Puncte einer natürlichen Begrenzung von 1 für die beiden Werthepaare (x, R_1), (x, R_2) nur ein Werth von $s-g(x)$ vorhanden sein. Da also die beiden Zweige längs einer Linie übereinstimmen, so müssten sie überhaupt übereinstimmen, also $s-g(x)$, also s nur eine einwerthige, daher rationale Function von x sein und somit $\sqrt{q(x)} =$ Const. sein. Demnach ist s entweder eine rationale Function von x oder eine rationale Function von R und x, w. z. b. w.

Für die Behandlung eines Integrals einer rationalen Function von x und R oder einer wie R verzweigten Function reicht es nicht hin, die x-Ebene durch die Linien q_1 und q_2 zu begrenzen, weil die so begrenzte Ebene nicht einfach zusammenhangend ist, und sich daher nicht alle verschiedenen Integrationswege auf einander reduciren lassen; dies findet aber statt, wenn wir die Linien q', q'' wiederherstellen als Begrenzung der Ebene. Wir nannten q_1, q', q'', q_2 zusammen q und es bilden diese bei unserer Vorstellungsweise der Ebene als unendlich grosse Kugelfläche einen einzigen Zug. Wir wollen nun das Integral $\int_0^x \frac{dx}{R(x)}$ $= u(x)$ einer näheren Untersuchung unterwerfen. Es besitzt die Eigenthümlichkeit für keinen Werth der oberen Grenze unendlich gross zu werden, weil nach den Zusätzen zu Ia. und zu Ib. $\frac{1}{R(x)}$ sowohl bis an die Verzweigungspuncte $x = \pm 1$, $\frac{1}{k}$ als auch bis $x = \infty$ integrirt werden kann und einen endlichen Werth liefert. Der Werth des Integrals $\int_0^x \frac{dx}{R(x)} = u(x)$ hängt aber sowohl von dem Wege ab, über welchen die Integration erstreckt wird, als auch von dem Zweigwerthe, welcher $R(x)$ bei der Integration ertheilt wird. Definiren wir jedoch zunächst $u(x)$ so, dass die Integration für $x = 0$ mit dem Zweigwerthe $R(0) = +1$ beginne, so ist $u(x)$ für alle Werthepaare $[x, R(x)]$ vollkommen bestimmt, wenn wir niemals den Integrationsweg über die Linie q hinwegführen, weil die durch q begrenzte Ebene einfach zusammenhangend ist, und der Zweig $R_1(x)$ in ihr eine eindeutig bestimmte Function ist, und mithin der Cauchy'sche Satz (III.) anwendbar ist, und daher nach V. alle Integrationswege zwischen 0 und x einen einzigen Werth liefern.

Es sei nun $\int_0^1 \frac{dx}{R(x)}$, worin für $R(x)$ der Zweig $R_1(x)$ genommen wird, gleich $\frac{\omega}{4}$ und $\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{R(x)} = \frac{\omega'}{2}$, wenn für $R(x)$ der Zweig $R_1(x)$ genommen wird, und die Integration über das positive Ufer von q_1 erstreckt wird, d. h. über das Ufer, welches für die Richtung von 1 nach $\frac{1}{k}$ zur Linken liegt.

Dann ist das Integral über das negative Ufer derselben Linie offenbar $-\frac{\omega'}{2}$, weil der Zweig $R_1(x)$, mithin jedes Element des Integrals zu beiden Seiten von q_1 nur durch das Vorzeichen verschiedene Werthe besitzt. Zu beiden Seiten der Linie q' besitzt $u(x)$ Werthe, die sich um eine Constante unterscheiden; und zwar ist $u(x)$ auf dem positiven Ufer von q' (d. h. auf dem, welches für die Richtung von $\frac{1}{k}$ nach ∞ zur Linken liegt) um die Grösse ω', welche ein Periodicitätsmodul der Function $u(x)$ heisst, grösser als auf dem negativen. Denn in der That, führt man die Variabele x von 0 nach 1, dann einmal über das positive, ein andermal über das negative Ufer von q_1 nach $\frac{1}{k}$, so wächst das eine Mal $u(x)$ um $\frac{1}{2}\omega'$, und nimmt das andere Mal um $\frac{1}{2}\omega'$ ab, führt man dann x auf dem positiven oder negativen Ufer von q' weiter, so wächst $u(x)$ beide Male um dieselbe Grösse, nämlich um $\int_{\frac{1}{k}}^{x}\frac{dx}{R_1(x)}$, weil zu beiden Seiten von q' $R_1(x)$ nur einen einzigen Werth besitzt, und der durch die Integration über die verschiedenen Ufer von q_1 erlangte Unterschied ω' bleibt überall bestehen. Berücksichtigt man, dass $R(x)$ seinen Werth nicht ändert, wenn man $-x$ statt x darin setzt, so findet man $\int_0^{-1}\frac{dx}{R(x)} = u(-1) = -\frac{\omega}{4}$ und $u\left(-\frac{1}{k}\right) =$

$$\int_0^{-\frac{1}{k}}\frac{dx}{R(x)} = -\frac{\omega}{4} + \int_{-1}^{-\frac{1}{k}}\frac{dx}{R(x)} = -\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, \quad \text{wenn}$$

die Integration über das positive Ufer von q_2, d. h. über das, welches für die Richtung von $-\frac{1}{k}$ nach -1 zur Linken liegt*), mit dem Zweigwerth $R_1(x)$ von $R(x)$ erstreckt wird; auf dem negativen Ufer von q_2 aber hat $u\left(-\frac{1}{k}\right)$ den Werth $-\frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}\omega'$. Auf dem positiven Ufer der Linie q'' aber (d. h. auf dem,

---

*) Die Bestimmung darüber, welches das positive und welches das negative Ufer sei, ist so getroffen, dass das positive Ufer der Linie q für die Richtung $1, \frac{1}{k}, \infty, -\frac{1}{k}, -1$ zur Linken liegt.

welches für die Richtung von $-\infty$ nach $-\frac{1}{k}$ zur Linken liegt,) ist $u(x)$ um die Grösse ω' grösser als auf dem negativen.

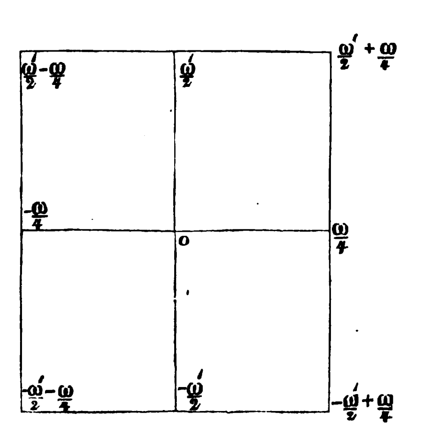
Das Integral $\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx}{R(x)}$ kann durch die Substitution $xk = \frac{1}{x'}$, $dx = -\frac{dx'}{kx'^2}$ ausgemittelt werden. Dadurch geht es über in das Integral $-\int_1^0 \frac{dx'}{-\sqrt{(1-k^2x'^2)(1-x'^2)}} = -\frac{1}{4}\omega$, wobei es gleichgiltig ist, auf welchem Wege die Integration bis zu dem Puncte ∞ erstreckt wird. Hieraus folgt, dass $u(\infty)$ auf dem positiven Ufer der Linie q den Werth $\frac{1}{2}\omega'$, auf dem negativen Ufer von q den Werth $-\frac{1}{2}\omega'$ besitzt.*)

Die Beziehung zwischen den Werthsystemen $[x, R_1(x)]$ und $u(x)$ treten noch deutlicher hervor, wenn man sich die Werthe von $u(x)$ graphisch darstellt, indem man die Werthe von u in einer Ebene ganz so wie die Zahlen x durch Puncte repräsentirt, wobei wir uns auf den Fall beschränken, in welchem k reell und kleiner als 1 ist, in welchem Falle die Linie q ganz auf die reelle Achse fällt. Führt man in $\int_0^x \frac{dx}{R(x)} = u(x)$ die Variabele x längs der reellen Achse von 0 bis 1 stetig vorwärts, so nimmt $u(x)$ die reellen Werthe zwischen 0 und $\frac{\omega}{4}$ jeden einmal und nur einmal an, weil sämmtliche Integrationselemente positiv reell sind, also $u(x)$ von 0 bis 1 immer wächst. Führt man nun x weiter vorwärts auf dem positiven Ufer von q_1, so ist hierbei jedes Element $\frac{dx}{R(x)}$ eine rein imaginäre positive Grösse. Denn in der That ist die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse in dem Intervall von 1 bis $\frac{1}{k}$ negativ, also die Wurzel imaginär, und zwar negativ imaginär, weil die Bewegung der Variabeln x um den Punct 1 in nega-

---

*) Der Cauchy'sche Satz III. behält offenbar seine Giltigkeit auch für solche Flächenstücke S, welche den Punct ∞ im Innern oder am Rande enthalten, wenn die Function für $x = \infty$ integrabel ist, also in einer höhern als der ersten Ordnung verschwindet.

tiver Richtung stattfindet, wenn x immer auf dem positiven Ufer von q bleibt, $\frac{1}{R(x)}$ ist folglich positiv imaginär. Demnach wächst $u(x)$ in dem Intervall von $x = 1$ bis $x = \frac{1}{k}$ immerfort um rein imaginäre Grössen und durchläuft alle Puncte der der z-Achse parallelen Geraden $\frac{\omega}{4}$ bis $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{4}$ ein- und nur



einmal. Führt man nun, auf dem positiven Ufer von q bleibend, x um den Punct $\frac{1}{k}$, also in negativer Richtung halb herum, so wird die Function unter dem Wurzelzeichen in $R_1(x)$ wieder positiv (weil nun zwei Factoren, $1 - x$ und $1 - kx$, negativ sind,) und daher $R_1(x)$ wieder reell. Vor $\frac{1}{k}$ hatte $R_1(x)$ rein imaginäre negative Werthe, durch den negativen Umgang um den Punct $\frac{1}{k}$ erhält aber $R(x)$ wieder den Factor $-i$ und wird mithin negativ reell. Also sind in dem Intervalle von $\frac{1}{k}$ bis ∞ sämmtliche Elemente. $\frac{dx}{R_1(x)}$ negativ reell. Die Function $u(x)$ nimmt demnach mit wachsenden x in diesem Intervalle immerfort um rein reelle Grössen bis zu dem Werthe $\frac{1}{2}\omega'$ ab, und durchläuft demnach die der y-Achse parallele Gerade $\frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{4}\omega$ bis $\frac{1}{2}\omega'$ ein- und nur einmal. Eine gleiche Betrachtung zeigt, dass den reellen Werthen von $x = 0$ bis $x = -1$

die reellen Werthe von 0 bis $-\frac{1}{4}\omega$, dem positiven Ufer von q_2 zwischen -1 und $-\frac{1}{k}$ die Punkte der Geraden $-\frac{1}{4}\omega$, $-\frac{1}{4}\omega+\frac{1}{2}\omega'$, dem positiven Ufer von q'' von $-\frac{1}{k}$ an bis ∞ die Puncte der Geraden $\frac{1}{2}\omega'-\frac{1}{4}\omega$ bis $\frac{1}{2}\omega'$ einmal und nur einmal entsprechen.

Der Begrenzung der Halbebene, in welcher der imaginäre Theil von x positiv ist, also der y-Achse, entspricht eindeutig die Begrenzung des Rechteckes $\frac{1}{4}\omega$, $\frac{1}{4}\omega+\frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{2}\omega'-\frac{1}{4}\omega$, $-\frac{1}{4}\omega$, und zwar entsprechen den Verzweigungspuncten 1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, -1 die Ecken. Man sieht auch leicht ein, dass der positiven z-Achse der x-Ebene die imaginäre Achse der u-Ebene von 0 bis $\frac{1}{2}\omega'$ eindeutig entspricht, denn in dem rein imaginären Intervall von 0 bis $i\infty$ ist $R_1(x)$ positiv reell, dx positiv imaginär, also $\frac{dx}{R_1(x)}$ positiv imaginär und demnach wächst $u(x)$ für wachsende rein imaginäre x immerfort von 0 bis $\frac{1}{2}\omega'$, weil $u(\infty)=\frac{1}{2}\omega'$ ist, wenn man sich den unendlich fernen Punct auf dem positiven Ufer von q in beliebiger Richtung nähert.

Dass zu jedem Werthe von u, der durch einen Punct im Innern des Rechteckes repräsentirt wird, ein Werthepaar $[x, R_1(x)]$ gehört, das durch einen Punct der betrachteten Halbebene repräsentirt wird, folgt daraus, dass die Werthe von u durch ein Ebenenstück repräsentirt werden, welches, ausgenommen in den Ecken und in dem Puncte $\frac{1}{2}\omega'$, welcher dem Puncte $x=\infty$ entspricht, nach pag. 7 und nach Satz VI. eine in den kleinsten Theilen ähnliche (conforme) Abbildung jener Halbebene ist.*) Wenn nun dies Ebenenstück das Rechteck nicht völlig ausfüllte, sondern wenn u die Werthe, die in einem

---

*) Durch die Substitution $\xi=\frac{x-\alpha-\beta i}{x-\alpha+\beta i}$ bildet Herr H. Schwarz („Ueber einige Abbildungsaufgaben", Crelle's Journal Bd. 70) die Hälfte der x-Ebene, in welcher der imaginäre Theil von x positiv ist, conform auf das Innere eines Kreises ab, und da diese die conforme Abbildung des Rechtecks $\frac{1}{4}\omega$, $\frac{1}{2}\omega'+\frac{1}{4}\omega$, $\frac{1}{2}\omega'-\frac{1}{4}\omega$, $-\frac{1}{4}\omega$ ist, so löst er hierdurch die Aufgabe, das Innere eines Rechtecks conform auf das Innere eines Kreises mit dem Radius 1 abzubilden. Der Punct $\alpha+\beta i$ entspricht dem Mittelpuncte des Kreises und ist willkürlich.

irgendwie begrenzten Stücke im Innern des Rechteckes liegen, nicht annähme, so könnte für die Puncte der Begrenzung dieses Stückes, welche l heisse, eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung nicht stattfinden, weil um jeden Punct im Innern der Halbebene eine kleine geschlossene Figur, z. B. ein Kreis gezogen werden kann, für die entsprechenden Puncte der Begrenzung l aber nicht. Einem Kreise ist aber nur ein Kreis ähnlich. Also kann im Rechteck eine solche Lücke nicht vorhanden sein. Ebensowenig können in irgend einem Stücke die Werthe von u doppelt vorhanden sein. Da dort die u-Ebene doppelt bedeckt würde, so würde auf die Begrenzung des zweiten Stückes dieselbe Schlussweise als auf die des fehlenden anwendbar sein, weshalb solche nicht möglich sind.

In gleicher Weise wird das negative Ufer der reellen Achse der x-Ebene durch die Begrenzung des Rechtecks $\frac{1}{4}\omega$, $-\frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{4}\omega$, $-\frac{1}{2}\omega' - \frac{1}{4}\omega$, $-\frac{1}{4}\omega$ eindeutig in der u-Ebene abgebildet, und das Innere des Rechtecks entspricht eindeutig dem Innern der vom negativen Ufer der y-Achse begrenzten Halbebene, und den Verzweigungspuncten die Ecken.

Wir gehen nun zum allgemeinen Falle, in welchem k beliebig ist, zurück, und erweitern die Bedeutung des Integrales $u(x) = \int_0^x \frac{dx}{R(x)}$ dahin, dass wir dasselbe über Wege erstrecken, welche über q_1 oder q_2 hinwegführen, und $R_1(x)$ stetig längs derselben in den Zweig $R_2(x)$ fortsetzen. Denkt man sich das System der Werthepaare $[x, R_2(x)]$ ebenso wie das $[x, R_1(x)]$ durch die Puncte einer Ebene repräsentirt, welche durch Linien q_1, q', q'', q_2 begrenzt wird; so würde für alle Puncte dieser Ebene $u(x)$ bestimmt sein, wenn der Werth für den Punct $x = 0$ $R(x) = -1$ bestimmt ist. Denn da die so begrenzte Ebene einfach zusammenhangend ist, und $\frac{1}{R(x)}$ in ihr überall den Charakter $f(x)$ hat, so lässt sich jeder Integrationsweg zwischen zwei Puncten x_1 und x_2 ersetzen durch einen zwischen x_1 und 0, und einen zwischen 0 und x_2. Da ferner offenbar

$$\int_0^x \frac{dx}{R_2(x)} = -\int_0^x \frac{dx}{R_1(x)} = -u(x)$$

für alle Werthepaare (x, R_2) ist, so wird $u(x)$ auch für das

erweiterte Gebiet bestimmt sein, wenn der Werth von $u(x)$ für $x = 0$, $R(x) = -1$ bestimmt wird.

Um von dem Puncte ($x = 0$, $R = 1$) zu dem Puncte ($x = 0$, $R = -1$) so zu gelangen, dass $R(x)$ auf dem Wege sich immer stetig ändert, giebt es nur zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, nämlich Wege, welche über die Linie q_1 führen, und Wege, welche über die Linie q_2 führen.

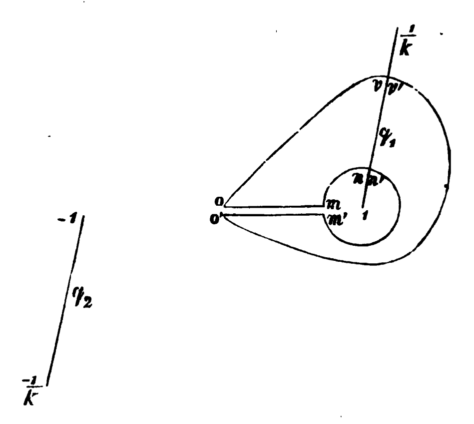
Nehmen wir als Integrationsweg den Weg $o\,m\,n\,n'\,m'\,o'$, so ist

$$\int\limits_{o\,m\,n\,n'\,m'\,o'} \frac{dx}{R(x)} = \int_0^m \frac{dx}{R_1(x)} + \int_{m'}^0 \frac{dx}{R_2(x)} + \int\limits_{m\,n\,n'\,m'} \frac{dx}{R(x)}$$

und wenn wir mit dem Radius des Kreises $m\,n\,n'\,m'$ zur Grenze 0 übergehen, gleich

$$\int_0^1 \frac{dx}{R_1(x)} + \int_1^0 \frac{dx}{R_2(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{R_1(x)} - \int_1^0 \frac{dx}{R_1(x)} = \frac{\omega}{2}.$$

Denselben Werth erhält man offenbar, wenn man den Kreis $m\,n\,n'\,m'$ durch einen andern in positiver Richtung um den



Punct 1 führenden Kreis ersetzt, weil eben $R(x)$ nur sein Zeichen ändert, sei es, dass man die Variabele x in positiver, sei es, dass man sie in negativer Richtung um den Punkt 1 herumführt.

Genau denselben Werth erhält man aber auch, wenn man als Integrationsweg den Weg $o\,\nu\,\nu'\,o'$ nimmt. Denn der Weg $o\,\nu\,\nu'\,o'$ kann durch den Weg $o\,\nu\,n\,n'\,\nu'\,o'$ ersetzt werden, weil

$R_1(x)$ auf dem positiven Ufer von q_1 denselben Werth hat, als auf dem negativen Ufer $R_2(x)$ und sich somit die Integralsumme

$$\int_{\nu}^{n} \frac{dx}{R_1(x)} + \int_{n'}^{\nu'} \frac{dx}{R_2(x)}$$

vollständig aufhebt. Weiter aber kann der Weg $o\,\nu\,n$ durch $o\,m\,n$, $n'\,\nu'\,o'$ durch $o'\,m'\,o'$ nach dem Cauchy'schen Satze (Satz III.) ersetzt werden, so dass also $u(x)$ in o' auch den Werth $\frac{1}{2}\omega$ erhält, wenn x über den Weg $o\,\nu\,\nu'\,o'$ geführt wird.

Führt man also die Variable x, $u(x)$ als Function der complexen Variabeln x stetig ändernd, auf beliebigem Wege von o über q_1 nach o', was ja weiter nichts heisst, als dass man den Integrationsweg von o nach o' über eine beliebige über q_1 führende Curve nehmen soll, so erhält man für $u(x)$ dort den Werth $\frac{1}{2}\omega$. Eine ganz gleiche Betrachtung ergiebt, dass wenn man x auf beliebigem Wege über q_2 von o nach o' führt, $u(x)$ dort den Werth $-\frac{1}{2}\omega$ erlangt. Demnach ist $u(x)$ für die Werthepaare $[x, R_2(x)]$ nicht vollkommen bestimmt, so lange man zu jedem, ein solches Werthepaar repräsentirendem Puncte sowohl über q_1 als über q_2 gelangen kann. Deshalb betrachten wir noch die z-Achse als Begrenzung dieser Ebene, so dass man zu allen Werthepaaren (x, R_2), welche durch Puncte auf ihrer negativen Seite repräsentirt werden, nur über q_2, zu denen, welche durch Puncte auf ihrer positiven Seite repräsentirt werden, nur über q_1 gelangen kann. Dann sind die Werthe von $u(x)$ auf dem positiven Ufer der z-Achse jener Ebene um ω grösser als auf dem negativen, weil dies im 0-Puncte stattfindet, und das Integral $u(x)$, über welches Ufer der z-Achse über eine bestimmte Strecke es auch genommen werden mag, immer genau um dieselbe Grösse wächst. Die Grösse ω heisst, wie ω', ein Periodicitätsmodul des Integrals $u(x)$.

Es ist also $u(x)$ oder besser $u(x, R)$ für alle Werthepaare $[x, R(x)]$ vollkommen bestimmt, wenn man die den Zweig $R_1(x)$ repräsentirende Ebene durch die einen Zug bildenden Linien $q'\,q''$ begrenzt, und die den Zweig $R_2(x)$ repräsentirende Ebene durch eben solche Linien $q'\,q''$ und durch die z-Achse, (welche mit jenen Linien im unendlich fernen Puncte der Ebene zusammentrifft,) begrenzt. Nennen wir im zweiten System diejenigen Ufer von q', q'' die positiven, welche im ersten die ne-

gativen sind, so ist $u(x, R)$ auf den positiven Ufern von q', q'' beider Ebenen um den Periodicitätsmodul ω' grösser als auf dem negativen, und auf dem positiven Ufer der z-Achse der den Zweig R_2 repräsentirenden Ebene um ω grösser als auf dem negativen, und ist sonst überall endlich und stetig.

Führt man aber die Variabele x über die Begrenzungslinien vom positiven zum negativen Ufer hinweg, $u(x, R)$ stetig fortsetzend, so erhält $u(x, R)$ Werthe, welche um ω' bez. ω grösser sind, als die eben bestimmten, und wenn man den Integrationsweg, oder was dasselbe ist, die Variabele x der Function $u(x, R)$ n bez. n' mal über die begrenzende z-Achse bez. über q' q'' in der einen oder andern Richtung stetig führt, so erhält u den Werth

$$u(x, R) \pm n\omega \pm n'\omega'$$

und ist also eine unendlich vieldeutige Function von x und R, ähnlich wie $\lg(x)$ nur bis auf ein beliebiges ganzes Multiplum von $2\pi i$ bestimmt ist, wenn nicht die Variabilität von x, wie es pag. 18 geschehen, beschränkt wird. Betrachtet man u nur als Function von x, so wird die Vieldeutigkeit noch vermehrt, indem zu jedem x ein R_1 und ein R_2 gehört, so dass u für jedes x einen in den allgemeinen Formen enthaltenen Werth erhält:

$$u \pm n\omega \pm n'\omega', \quad \tfrac{1}{2}\omega - u \pm m\omega \pm m'\omega',$$

worin n, n', m, m' beliebige ganze Zahlen sind. In den Verzweigungspuncten kann demnach u die Werthe, die die Tabelle angiebt, annehmen:

$$\begin{array}{lll}
x = & 1, & -1, \\
u = & \tfrac{1}{4}\omega \pm m\omega \pm m'\omega', & -\tfrac{1}{4}\omega \pm m\omega \pm m'\omega', \\
x = & \dfrac{1}{k}, & -\dfrac{1}{k}, \\
u = & \tfrac{1}{4}\omega \pm m\omega \pm \dfrac{2m'+1}{2}\,\omega', & -\tfrac{1}{4}\omega \pm m\omega \pm \dfrac{2m'+1}{2}\,\omega'.
\end{array}$$

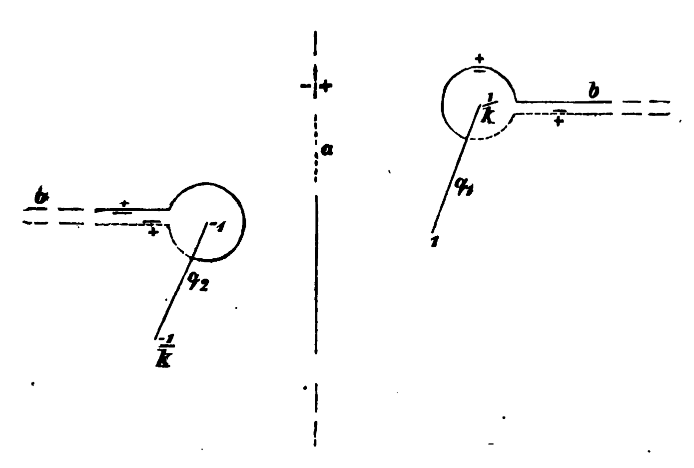
Dies wird hinreichen, um die eigenthümlichen Verhältnisse klar zu legen, welche bei den Functionen eintreten, die als Integrale algebraischer mehrwerthiger Functionen definirt sind. Wir wollen nun noch ganz kurz die schöne Methode erwähnen, welche Riemann angewendet hat, indem er die beiden (x, R_1) und (x, R_2) darstellenden Ebenen zu einer Fläche vereinigt, um eine mehrwerthige Function auf ein räumliches Gebilde zu beziehen, in welchem sie als einändrig und einwerthig anzusehen ist.

Man denke sich zwei Ebenen über der x-Ebene übereinander ausgebreitet, und lasse dieselben längs zweier Geraden q_1, q_2 zwischen 1 und $\frac{1}{k}$ und zwischen -1 und $-\frac{1}{k}$ so zusammenhängen, dass diese Geraden gleichsam die Thore bilden, durch welche hindurch man aus der einen Ebene nothwendig in die andere gelangt, so dass man, gleichviel ob man in der einen oder der andern Richtung über die Linie q_1 oder q_2 hinweggeht, aus dem oberen in das untere Blatt, oder aus dem unteren in das obere gelangt, ohne das System zu verlassen. Die beiden Linien q_1 und q_2 bilden also keine Begrenzung, wie es früher war, sondern sind nur der Ort, längs welches die beiden Ebenen zusammenhängen, oder längs welches sich das eine Blatt in das andere fortsetzt. Dabei macht dem Anfänger gemeiniglich die Vorstellung Schwierigkeit, dass sich die beiden Blätter dort kreuzweise durchdringen, weswegen besonders darauf aufmerksam gemacht wird. Ein Querschnitt senkrecht auf die Linie wird die Form haben

Dieses System zweier zusammenhangenden Ebenen heisst eine Riemann'sche Fläche und werde mit T bezeichnet. Es ist $R(x)$ eine einwerthige (daher auch einändrige) Function der Puncte derselben, oder es repräsentirt jeder ihrer Puncte ein Werthepaar (x, R). Denn lässt man die Puncte des oberen Blattes (was nach dem pag. 60 Gesagten möglich ist) die Werthepaare (x, R_1) repräsentiren, die des untern die Werthepaare (x, R_2), so geht gerade so, wie das obere Blatt in das untere übergeht, $R_1(x)$ in $R_2(x)$ über, wenn der (x, R_1) repräsentirende Punct über eine der Linien q_1 oder q_2 hinweg bewegt wird. Demnach repräsentirt die Fläche T die Werthepaare (x, R) eindeutig, und jede wie $R(x)$ verzweigte Function ist eine einwerthige Function des Ortes in T, und jede in T einwerthige Function ist wie $R(x)$ verzweigt und demnach eine rationale Function von x und R, was aus den pag. 63 gemachten Bemerkungen leicht geschlossen wird.

Damit nun das Integral einer in T einwerthigen Function ebenfalls eindeutig bestimmt sei, muss man die Fläche T so

begrenzen, dass sie einfach zusammenhangend wird. Zu dem Zwecke ziehen wir eine Linie b, die sowohl im oberen Blatte, als auch im unteren verläuft, und die etwa mit den früher gezogenen Linien q, q' im Allgemeinen zusammenfällt, nur nicht in die Puncte $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ einläuft, sondern um dieselben herum aus



einem Blatte ins andere geht. (In der Figur ist die Linie b, soweit sie dem oberen Blatte angehört, durch einen continuirlichen Zug angedeutet, soweit sie dem unteren angehört, durch eine punctirte Linie. Die Linie a ist durchaus punctirt, weil sie ganz im unteren Blatte liegt. Auf die Ufer, welche als die positiven angesehen werden sollen, ist ein $+$Zeichen, auf die anderen ein $-$Zeichen gesetzt.) Die Linien a und b heissen die Querschnitte der Fläche T, und ihre beiden Ufer bilden zusammen eine aus einem einzigen Zuge bestehende Begrenzung, weil a und b im unendlich fernen Puncte des unteren Blattes zusammentreffen, und sie verwandeln die Fläche T in ein einfach zusammenhangendes Gebiet T'. Riemann beweist nun, dass für dieses Gebiet T' der Cauchy'sche Satz giltig bleibt, und somit das Integral einer in T einwerthigen Function über verschiedene Wege zwischen zwei Puncten [Werthepaaren (x, R)] nur einen Werth erlangt, wenn die Wege ganz in T' liegen und keinen Punct einschliessen, für welchen die Integrabilität der zu integrirenden Function aufgehoben wird. Mit der Function $\frac{1}{R(x)}$

ist dies für keinen Punct von T der Fall, sie hat vielmehr überall in T' den Charakter $f(x)$, und man erkennt die Einwerthigkeit des Integrales $\int_0^{(x,R)} \frac{dx}{R(x)}$ für alle Werthepaare, welche durch Puncte in T' repräsentirt werden, leicht aus den pag. 72 gemachten Bemerkungen. Auf dem positiven Ufer des Querschnitts a ist aber offenbar dies Integral, also $u(x, R)$, um ω grösser als auf dem negativen, und auf dem positiven Ufer von b um ω' grösser als auf dem negativen.

Stellt man sich die Werthe von u für die Puncte in T' in einer Ebene (der u-Ebene) graphisch dar, so wird, wie wir gesehen haben, das obere Blatt durch ein Rechteck abgebildet, welches durch die imaginäre Achse halbirt wird, und dessen Ecken $\frac{1}{4}\omega - \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $-\frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $-\frac{1}{4}\omega - \frac{1}{2}\omega'$ sind. Gehen wir über q_1 in das untere Blatt zu den Puncten, welche auf dem positiven Ufer von a liegen, also zu Puncten, die Träger von Werthepaaren (x, R_2) sind, so hat dort $u(x, R_2)$ den Werth $\frac{1}{2}\omega - u(x, R_1)$ und so entsprechen diese Puncte einem Rechteck, welches dem Rechteck $\frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{4}\omega$, $\frac{1}{4}\omega - \frac{1}{2}\omega'$, $-\frac{1}{2}\omega'$ congruent, aber um die Strecke $\frac{1}{4}\omega$ verschoben ist, also die Ecken $\frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{4}\omega$, $\frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{4}\omega - \frac{1}{2}\omega'$ hat. Ebenso entsprechen die Puncte der unteren Halbebene, welche auf dem negativen Ufer von a liegen, den Puncten eines Rechtecks mit den Ecken $-\frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $-\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $-\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\omega'$, $-\frac{1}{4}\omega - \frac{1}{2}\omega'$. Also entsprechen den Puncten der Fläche T' die Puncte eines Rechtecks mit den Ecken $\frac{\omega + \omega'}{2}$, $\frac{-\omega + \omega'}{2}$, $\frac{-\omega - \omega'}{2}$, $\frac{\omega - \omega'}{2}$, und zwar dem positiven Ufer von a $(-i\infty, \ldots 0, \ldots, +i\infty)$ die Seite $\frac{\omega + \omega'}{2} \ldots \frac{\omega}{2} \ldots \frac{\omega - \omega'}{2}$, dem negativen die gegenüberliegende um ω entfernte Seite. Es entspricht $[(\infty, R_2) \ldots \frac{1}{k} \ldots (\infty, R_1) \ldots -\frac{1}{k} \ldots (\infty, R_2)]$, dem positiven Ufer von b, die Seite $\frac{\omega - \omega'}{2} \ldots \frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2} \ldots \frac{-\omega'}{2} \ldots -\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2} \ldots -\frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}$, den innern Puncten von T' aber die innern Puncte des Rechtecks.

Bewegt man den Punct (x, R) über einen Querschnitt hin-

weg, z. B. vom negativen Ufer von a auf das positive, und setzt u stetig fort für alle Puncte von T', so erhält man offenbar im Puncte (x, R) einen Werth von u, der sich von dem früheren um einen Periodicitätsmodul unterscheidet, im Beispiel den Werth $u(x, R) + \omega$. Führt man die Variabele x über den Querschnitt a in der einen oder der andern Richtung m mal, über b m' mal fort, $u(x, R)$ stetig fortsetzend, so erhält u offenbar für jeden Punct in T' den Werth

$$u(x, R) \pm m\omega \pm m'\omega',$$

worin unter $u(x, R)$ der Werth verstanden wird, den u im Puncte (x, R) annimmt, wenn $u = 0$ ist für $x = 0$, $R = 1$, und der Integrationsweg des Integrales $\int_0^{(x, R)} \frac{dx}{R(x)}$ nur in T' verläuft, ohne über einen Querschnitt hinweg zu führen. Die Werthe, die u annimmt, wenn (x, R) m mal über a, und m'mal über b und dann in T' zu allen Puncten geführt wird, werden in der u-Ebene durch ein Rechteck repräsentirt, dessen Ecken

$$m\omega + m'\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad m\omega + m'\omega' + \frac{-\omega + \omega'}{2},$$

$$m\omega + m'\omega' + \frac{-\omega - \omega'}{2}, \quad m\omega + m\omega' + \frac{\omega - \omega'}{2}$$

sind, Die Fläche T, in welcher die Variabilität von (x, R) nicht durch Querschnitte beschränkt ist, wird demnach durch die ganze u-Ebene repräsentirt, weil ihre sämmtlichen Puncte in der Form

$$u \pm m\omega \pm m\omega'$$

enthalten sind, unter u die T' entsprechenden Werthe verstanden, da ja u die Werthe, welche durch Puncte eines Rechteckes repräsentirt werden, sämmtlich annimmt.

Im allgemeinen Falle, in welchem k beliebig ist, sind die den Querschnitten von T entsprechenden Linien der u-Ebene nicht nothwendig gerade Linien, aber es werden die Werthe von u, welche T' entsprechen, noch immer durch eine Figur repräsentirt, welche durch vier, den positiven und negativen Ufern der Querschnitte entsprechende Curven begrenzt ist, von denen je zwei parallel sind, weil u längs der ganzen Linie a auf dem positiven Ufer um die constante Grösse ω grösser ist, als auf dem negativen, längs der ganzen Linie b um ω' auf dem positiven Ufer grösser als auf dem negativen. Sollen den Quer-

schnitten gerade Linien der u-Ebene entsprechen, so dürfen sie selbst im Allgemeinen nicht gerade Linien sein.

So viel von den Riemann'schen Flächen und deren Abbildung durch ein überall endliches Integral.

Die Untersuchung der Functionen, welche rational in Bezug auf x und eine Quadratwurzel s einer ganzen Function vierten Grades von x sind, also in der Form

$$s = \sqrt{A.(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$$

enthalten sind, kann auf die Untersuchung der rationalen Functionen von ξ und $R(\xi)$, also solcher von der eben behandelten Form zurückgeführt werden, indem eine eindeutige Beziehung zwischen den rationalen Functionen von x und s, und denen von ξ und $R(\xi)$ hergestellt wird. Dies geschieht mittels der Relation

$$\alpha+\beta\xi+\gamma x+\delta x\xi = 0$$

oder

$$x = -\frac{\alpha+\beta\xi}{\gamma+\delta\xi}, \quad \xi = -\frac{\alpha+\gamma x}{\beta+\delta x},$$

in welcher die Constanten α, β, γ, δ so zu bestimmen sind, dass den Puncten x_1, x_2, x_3, x_4 der x-Ebene die Puncte $1, -1, \frac{1}{k}\ -\frac{1}{k}$ der ξ-Ebene in beliebiger Ordnung entsprechen, wobei jedoch k keine vorgegebene Grösse sein kann,) sondern aus x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmt ist. Durch diese Substitution wird

$$\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)} = \frac{\text{Const.}}{(\gamma+\delta\xi)^2}\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}$$

und

$$\int\frac{dx}{s} = \text{Const.}\int\frac{d\xi}{R(\xi)}.$$

Zur Bestimmung der Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ dienen vier lineare homogene Gleichungen, deren Lösung nur dadurch möglich wird, dass die in ihnen enthaltene Constante k so bestimmt wird, dass ihre Determinante verschwindet. Diese Gleichungen erhält man aus der Gleichung $\alpha+\beta\xi+\gamma x+\delta x\xi = 0$, wenn man für x und ξ die Werthe x_1 und 1; x_2 und -1; x_3 und $\frac{1}{k}$; x_4 und $-\frac{1}{k}$ einsetzt, sie sind:

$$\alpha+\beta+\gamma x_1+\delta x_1 = 0, \qquad \alpha-\beta+\gamma x_2-\delta x_2 = 0,$$
$$\alpha k+\beta+\gamma k x_3+\delta x_3 = 0, \qquad \alpha k-\beta+\gamma k x_4-\delta x_4 = 0.$$

Verbindet man die ersten zwei durch Addition und Subtraction, und dann die letzten, so fliesst daraus das System:

$$2\alpha + \gamma(x_1+x_2) + \delta(x_1-x_2) = 0,$$
$$2\beta + \gamma(x_1-x_2) + \delta(x_1+x_2) = 0,$$
$$2\alpha k + \gamma k(x_3+x_4) + \delta(x_3-x_4) = 0,$$
$$2\beta + \gamma k(x_3-x_4) + \delta(x_3+x_4) = 0.$$

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen kann man α, aus der zweiten und vierten β leicht eliminiren, woraus folgt:

$$\gamma k(x_1+x_2-x_3-x_4) + \delta([x_1-x_2]k-x_3+x_4) = 0,$$
$$\gamma(x_1-x_2-kx_3+kx_4) + \delta(x_1+x_2-x_3-x_4) = 0.$$

Demnach findet man für das Verhältniss $\frac{\gamma}{\delta}$ die beiden Werthe:

$$\frac{(x_3-x_4)\frac{1}{k}-(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)}, \quad \frac{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)}{k(x_3-x_4)-(x_1-x_2)},$$

aus deren Gleichsetzung zur Bestimmung von k die quadratische Gleichung entspringt

$$k^2(x_3-x_4)(x_1-x_2)$$
$$+[((x_1+x_2)-(x_3+x_4))^2-(x_1-x_2)^2-(x_3-x_4)^2].k$$
$$+(x_3-x_4)(x_1-x_2) = 0,$$

deren eine Wurzel der reciproke Werth der andern ist. Ausserdem sind noch für k verschiedene Werthe möglich, welche durch Vertauschung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 erhalten werden. Die Beziehungen, welche zwischen diesen bestehen, werden wir später kennen lernen.

Ist die vorgegebene Quadratwurzel nicht aus einem Ausdrucke vierten, sondern nur des dritten Grades zu ziehen, so dass einer ihrer Verzweigungspuncte auf den unendlich fernen Punct fällt, also ist etwa

$$s = \sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)},$$

so kann man durch die Substitution

$$x = -\frac{\alpha+\beta\xi}{1-k\xi}$$

s transformiren, und die Beziehung

$$s = \frac{\text{Const.}}{(1-k\xi)^2} R(\xi)$$

erhalten.

Bemerkenswerth ist, dass jedesmal der Modul k seinem absoluten Betrage nach kleiner als 1 vorausgesetzt werden kann, weil die quadratische Gleichung für k reciproke Werthe liefert.

Legendre hat zuerst die Untersuchung der Integrale von Functionen, welche keine andere Irrationalität enthalten als die Quadratwurzel einer ganzen Function dritten oder vierten Grades, durch das Mittel der Substitution auf die Untersuchung solcher Functionen, in welchen die Quadratwurzel die Form hat

$$R(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,,$$

zurückgeführt. Man kann deshalb alle Integrale rationaler Functionen von x und einer Quadratwurzel s aus einer ganzen Function dritten oder vierten Grades mit dem Namen elliptische Integrale belegen, wenn man die Integrale rationaler Functionen von x und R so nennt. Es bilden dann die Integrale von x und R die canonische Form elliptischer Integrale, und Legendre hat gezeigt, dass sie sämmtlich auf drei wesentlich verschiedene Gattungen zurückgeführt werden können. Die Grösse k heisst der Modul der elliptischen Integrale oder auch der elliptischen Functionen.

Gauss, Abel und Jacobi gewannen dadurch der Theorie dieser Functionen eine neue fruchtbare Seite ab, dass sie die Integrale umkehrten, und die doppelte Periodicität dieser umgekehrten Functionen, welche elliptische Functionen heissen, entdeckten. Fasst man die obere Grenze des Integrals $\int_0^x \frac{dx}{R(x)} = u$ als Function von u auf, so erhält man die Function, welche Jacobi mit

$$\sin\operatorname{am} u$$

bezeichnet. Durch die Arbeiten Jacobi's, welcher für die Irrationalität $R(x)$ die Form $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ beibehielt, ist diese canonische Form fast in allen Arbeiten über elliptische Functionen angenommen worden und wird grösstentheils auch in den Vorlesungen über diesen Gegenstand zu Grunde gelegt. Dies hat mich bewogen, dieselbe hier ebenfalls festzuhalten. Freilich bin ich der Ansicht, dass es besser sei mit Riemann

$$\sqrt{x.(1-x)(1-k^2x)}$$

als die canonische Form anzusehen, welche mit der Legendre'schen in einer einfachen, jedoch zweideutigen Beziehung steht. Setzt man nämlich $x^2 = \xi$, so hat man

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x)} = \sqrt{(1-\xi)(1-k^2\xi)}$$

und

$$u = \int_0^x \frac{dx}{R(x)} = \tfrac{1}{2}\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}.$$

Riemann betrachtet nun $\sqrt{\xi}$, also eine zweiwerthige Function als Function von u und setzt

$$\sqrt{\xi} = \sin \operatorname{am} u.$$

Diese Form $\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}$ als canonische eingeführt bietet in vieler Beziehung Vortheile namentlich dadurch, dass in ihr die Verzweigungspuncte nicht von einander abhängig sind. Die Darstellung ferner einer zweiwerthigen Function wie $\sqrt{\xi}$ durch das überall endliche Integral schliesst sich der Theorie der ϑ-Functionen weit inniger an, als die Jacobi'sche Darstellung einer einwerthigen Function, so dass im ersten Falle die Transformation der ϑ-Functionen und elliptischen Functionen einander congruent sind, im zweiten Falle nicht. Dies sind die Gründe, weshalb ich die Riemann'sche Form vorziehen möchte.

Die Zurückführung der Integrale wie $R(x)$ verzweigter, also rationaler Functionen von R und x, auf die drei Gattungen elliptischer Integrale geschieht nun etwa in folgender Weise.

Jede rationale Function $f(x, R)$ von x und R ist in der Form

$$\frac{M+NR}{P+QR} = \frac{(M+NR)(P-QR)}{P^2-Q^2R^2} = F(x) + G(x)\frac{1}{R}$$

enthalten, worin M, N, P, Q ganze und F und G rationale Functionen von x sind. Also ist

$$\int f(x, R) = \int F(x)\,dx + \int G(x)\frac{dx}{R},$$

worin nur das zweite Integral der rechten Seite weiter zu betrachten ist, weil das erste mit bekannten Mitteln ausgeführt werden kann. Zerlegt man $G(x)$ in Partialbrüche, so wird dies letzte Integral in eine Summe von Integralen der Form

$$\int \frac{x^m dx}{R(x)}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n R(x)}$$

zerfallen. In dem ersten Integral kann die weitere Betrachtung auf den Fall gerader m beschränkt werden, weil für ungerade m durch die Substitution $x^2 = \xi$ das Integral in ein sogenanntes Kreisintegral übergeht, welches durch Logarithmen und cyklometrische Functionen integrirt werden kann. Ist $m = 0$, so ist

$$\int_0^x \frac{dx}{R}$$

das Integral erster Gattung, welches überall endlich bleibt. Ist $m = 2$, so ist

$$\int_0^x \frac{x^2}{R} dx$$

ein Integral zweiter Gattung, welches für $x = \infty$ unendlich gross erster Ordnung wird. Für $m > 2$ bringt man durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ das Integral auf die Form

$$-\frac{1}{k}\int \frac{d\xi}{\xi^m \sqrt{(1-\xi^2)1-\frac{1}{k^2}\xi^2}},$$

also auf die eines speciellen Falles des Integrals $\int \frac{dx}{(x-a)^n R(x)}$ zurück. Dieses letzte ist nun der nach a genommene $n-1^{te}$ Differentialquotient von

$$\int \frac{dx}{(x-a)R(x)},$$

welches für $x = a$ wie $\lg x - a$ unendlich wird, und somit den wesentlichen Charakter eines Integrales dritter Gattung besitzt. Da durch einmalige Differentiation nach a für $a = 0$ aus diesem ein Integral zweiter Gattung entsteht, so würde es schon hinreichen, wenn das Integral erster und dritter Gattung ausgeführt würde, damit die Integration der rationalen Functionen von x und R als ausgeführt angesehen werden könnte.

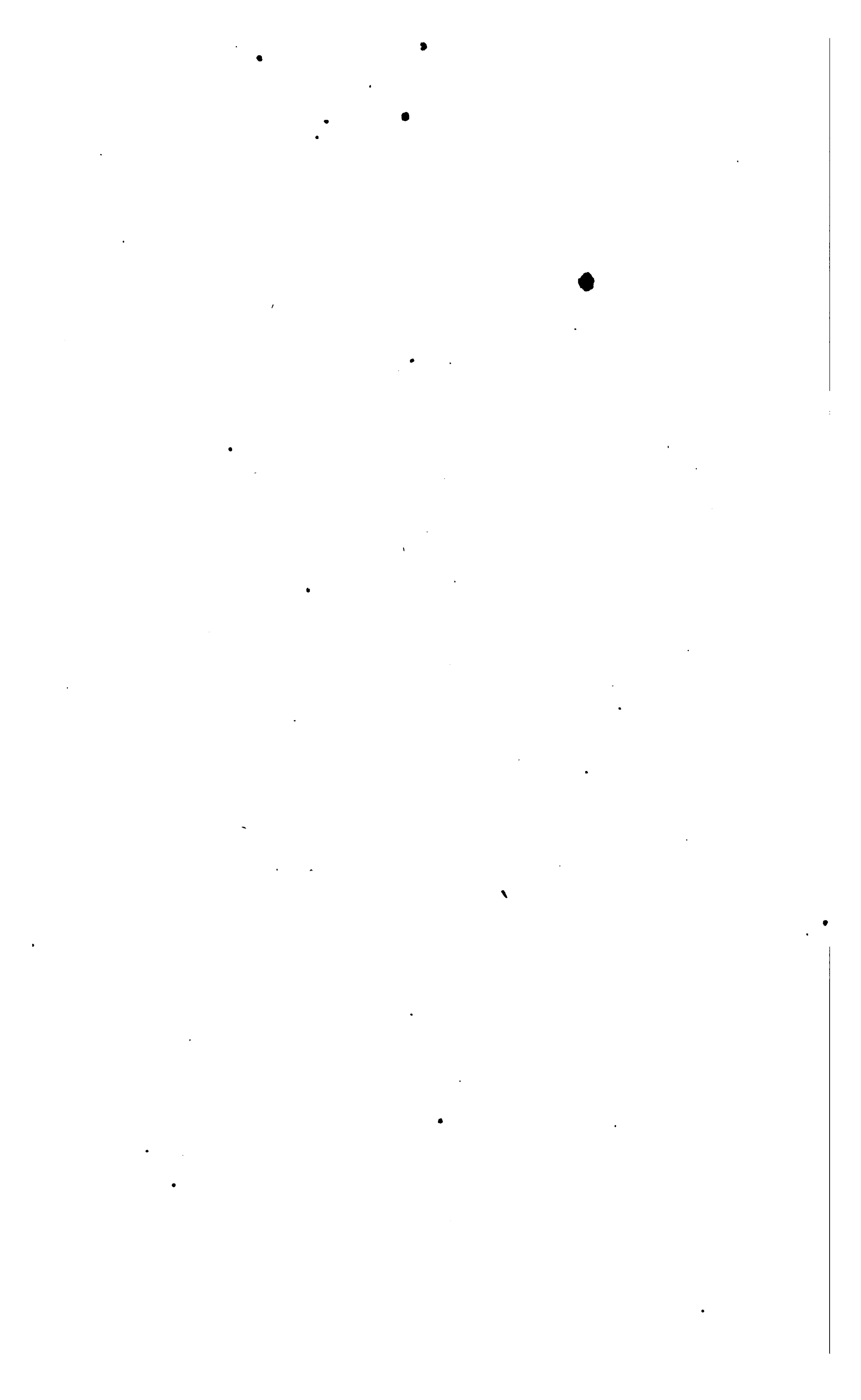
Theorie

der

Thetafunctionen einer Veränderlichen

oder der Reihe

$$\sum_{(n)\,-\infty}^{+\infty} e^{an^2+2nv}.$$



Art. 1. Die Functionalgleichungen der ϑ-Functionen. Das Verschwinden der ϑ-Functionen.

Wir betrachten die (elliptischen) ϑ-Functionen als Integral der beiden Functionalgleichungen:

$$(1.)\quad \vartheta_{hg}(v+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}.\vartheta_{hg}(v),$$

$$(2.)\quad \vartheta_{hg}(v+\varkappa a) = (-1)^{g\varkappa}.e^{-a\varkappa^2-2\varkappa v}.\vartheta_{hg}(v),$$

worin h, g, $\varkappa$, λ beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind.

Ausserdem sollen die ϑ-Functionen für alle endliche Werthe von v endliche einwerthige und stetige Functionen der complexen Variabeln v sein.

Um die Functionalgleichungen (1) und (2) zu integriren, machen wir zuerst die Substitution $v = \lg t$. Für jeden Werth von t nimmt v einen endlichen Werth an, wenn t von 0 und ∞ verschieden ist. Es ist $t = e^v$ eine für alle endliche Werthe von v stetige und einwerthige Function. Jedem bestimmten Werthe von v, oder einem um ein ganzes Multiplum von $2\pi i$ davon verschiedenen, entspricht ein einziger Werth von t, weil $e^{v+2m\pi i} = e^v = t$ ist.*) Demnach ist $\vartheta_{hg}(\lg t) = \varphi(t)$ eine für alle Werthe von t stetige und einwerthige complexe Function, wenn t innerhalb eines Ringes zwischen einem im Nullpuncte centrischen beliebig kleinen und einem beliebig grossen Kreise verläuft. Denn wenn t sich um den Punct Null einmal herumbewegt, so ändert sich $\lg(t)$ um $2\pi i$ und $\varphi(t)$ bleibt wegen der Gleichung (1) ungeändert. Eine solche Function lässt sich aber nach dem Laurent'schen Satze (XVII. pag. 26) nach auf- und absteigenden Potenzen in eine unendliche Reihe entwickeln. Wir

---

*) Unter m und n sollen im Folgenden durchgehend ganze positive oder negative Zahlen verstanden werden.

wissen jedoch noch nicht, ob eine stetige einwerthige Function von v existirt, welche die Gleichungen (1) und (2) befriedigt. Wäre die Existenz nachgewiesen, so stände die Convergenz der Reihe (nach XVII.) fest. Da dies aber nicht der Fall ist, so wird erst umgekehrt aus der Convergenz der Reihe die Existenz zu folgern sein.

Setzen wir also

$$\vartheta_{hg}(v) = \varphi(t) = \sum_{(m)-\infty}^{\infty} A_m t^m = \sum_{(m)-\infty}^{\infty} A_m e^{mv},$$

so folgt aus der Functionalgleichung (1)

$$\vartheta_{hg}(v+i\pi) = \sum_{(m)-\infty}^{\infty} A_m e^{vm}.(-1)^m$$

$$= (-1)^h \vartheta_{hg}(v) = (-1)^h \sum_{(m)-\infty}^{\infty} A_m e^{vm},$$

und hieraus nach Satz XVII.:

$$A_m(-1)^{h+m} = A_m;$$

oder wenn man $2n+h$ und $2n+h+1$ für m setzt:

$$A_{2n+h} = A_{2n+h}, \quad A_{2n+h+1} = -A_{2n+h+1} = 0.$$

Also ist

$$\vartheta_{hg}(v) = e^{hv}.\sum_{(n)-\infty}^{\infty} B_n e^{2nv},$$

wenn B_n für A_{2n+h} gesetzt wird.

Nun wenden wir auf diese Reihe die Functionalgleichung (2) an, so ist

$$\vartheta_{hg}(v+a\varkappa) = \sum_{(n)-\infty}^{\infty} B_n e^{2nv+hv+2na\varkappa+ha\varkappa} =$$

$$\vartheta_{hg}(v).e^{-a\varkappa^2-2\varkappa v-g\varkappa i\pi} = \sum_{(m)-\infty}^{\infty} B_m e^{-a\varkappa^2-2(m-\varkappa)v+hv-g\varkappa i\pi}.$$

Setzen wir in dem letzten Ausdrucke n statt $m-\varkappa$, so führen wir dadurch nur eine veränderte Zählung der Glieder ein und erhalten

$$\sum_{(n)-\infty}^{\infty} e^{-a\varkappa^2+(2n+h)v-g\varkappa i\pi} B_{n+\varkappa} = \sum_{(n)-\infty}^{\infty} e^{(2n+h)v+2na\varkappa+ha\varkappa}.B_n,$$

woraus wiederum nach XVII. folgt

$$B_n e^{2na\varkappa+ha\varkappa} = B_{n+\varkappa}.e^{-a\varkappa^2-g\varkappa i\pi}.$$

Hierdurch wird jeder Coefficient mit jedem andern, B_m mit B_n in Verbindung gesetzt, weil $\varkappa$ eine willkürliche ganze positive oder negative Zahl ist. Man sieht a posteriore leicht ein, dass

diese unendlich vielen Gleichungen nicht im Widerspruche mit einander stehen. Es ist aber für $n = 0$

$$B_x = B_0 \cdot e^{ahx + ax^2 + gxi\pi},$$

worin x beliebig ist, also durch m ersetzt werden kann. So haben wir denn, B statt B_0 gesetzt:

$$\vartheta_{hg}(v) = B \cdot e^{hv} \cdot \sum_{(m)}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2m(v + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}gi\pi) + am^2}$$

und

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = e^{2an + (h+1)a + 2v + gi\pi},$$

$$\frac{B_{-n-1}}{B_{-n}} = e^{2na - (h-1)a - 2v - gi\pi}.$$

Beide Quotienten nähern sich mit wachsendem n der Null dann und nur dann, wenn a einen negativen reellen Theil besitzt und die Reihe convergirt unter dieser Voraussetzung für beliebige endliche Werthe von v.

Die Constante B beschränken wir durch die partielle Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \frac{4\partial \vartheta_{hg}(v)}{\partial a} = \frac{\partial^2 \vartheta_{hg}(v)}{\partial v^2}.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$\frac{4\partial B}{\partial a} = h^2 B, \quad \text{also} \quad B = e^{\frac{1}{4}h^2 a} \cdot C$$

und C von a unabhängig genommen wird. Es soll aber $C = e^{-\frac{1}{2}hgi\pi}$ gesetzt werden, so dass nun die ϑ-Function völlig bestimmt ist durch die Gleichung

$$(4.) \qquad \vartheta_{hg}(v) = e^{hv + \frac{1}{4}h^2 a - \frac{1}{2}hgi\pi} \cdot \sum_{(n)}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{an^2 + 2n(v + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}gi\pi)}.$$

Die Functionalgleichungen (1.) und (2.) und die partielle Differentialgleichung (3.) bestimmen also eine ϑ-Function bis auf einen willkürlichen von v und a unabhängigen Factor.

Ist $h = 0$, $g = 0$, so lassen wir an der ϑ-Function die Indices fort und haben

$$\vartheta(v) = \sum_{(n)}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{an^2 + 2nv} = 1 + \sum_{(n)}\limits_{1}^{\infty} e^{an^2}(e^{2nv} + e^{-2nv}).$$

Diese Function ändert offenbar ihren Werth nicht, wenn man v in $-v$ verwandelt, in einer Entwicklung nach Potenzen von v können daher nur gerade Potenzen vorkommen. Daraus folgt

(5.) *$\vartheta(v)$ ist eine gerade Function von v.*

Die Grösse $i\pi$ heisst die Periode, a der Modul der ϑ-Functionen, welcher zuweilen noch angedeutet werden muss, was durch die Schreibweise $\vartheta(v, a)$ geschieht. Es ist in derselben

$$\vartheta(v, a+2m\pi i) = \vartheta(v, a), \quad \vartheta(v, a+m\pi i) = \vartheta(v+\tfrac{1}{2}m\pi i, a).$$

Die ϑ-Function $\vartheta_{hg}(v)$ wird mittels der Gleichung, deren Richtigkeit aus der Definition durch die Reihe unmittelbar ersichtlich ist,

$$(6.) \qquad \vartheta_{hg}(v) = e^{hv+\frac{1}{4}h^2a-\frac{1}{2}hgi\pi}.\vartheta(v+\tfrac{1}{2}ah+\tfrac{1}{2}gi\pi)$$

auf die ohne Index zurückgeführt. Es reicht hin für h und g die beiden Zahlen 0 und 1 zu setzen, also die vier ϑ-Functionen $\vartheta(v)$, $\vartheta_{01}(v)$, $\vartheta_{10}(v)$, $\vartheta_{11}(v)$ zu betrachten, weil auf diese die übrigen mittels der Gleichungen (1.) und (2.) zurückgeführt werden. Es ist nun [nach (5.) und (6.)]

$$\vartheta_{hg}(v) = e^{\frac{1}{4}h^2a+hv-\frac{1}{2}ghi\pi}.\vartheta(v+\tfrac{1}{2}ah+\tfrac{1}{2}i\pi g)$$
$$= e^{\frac{1}{4}h^2a+hv-\frac{1}{2}ghi\pi}.\vartheta(-v-\tfrac{1}{2}ah-\tfrac{1}{2}gi\pi)$$
$$= e^{\frac{1}{4}h^2a+hv-\frac{1}{2}ghi\pi}.\vartheta(-v+\tfrac{1}{2}ha+\tfrac{1}{2}gi\pi).e^{-h^2a+2h(\frac{1}{2}ha+\frac{1}{2}gi\pi)-2hv}$$
$$= e^{hgi\pi}.\vartheta_{h,g}(-v).$$

Daraus folgt:

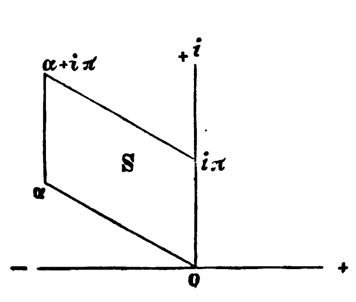
(7.) *$\vartheta_{hg}(v)$ ist eine gerade Function, wenn $h.g$ gerade ist, eine ungerade Function, wenn $h.g$ ungerade ist. $\vartheta_{11}(v)$ wird für $v=0$ und $\vartheta(v)$ für $v=\frac{1}{2}(a+i\pi)$ Null.*

Mit Hilfe des Satzes XI. pagg. 21, 22 zeigen wir leicht, dass für andere Werthe als den in der Form

$$v = \tfrac{1}{2}(2m+1)a+\tfrac{1}{2}(2n+1)i\pi$$

enthaltenen die Function $\vartheta(v)$ nicht verschwindet.

Wir suchen die Anzahl der Puncte, für welche $\vartheta(v)$ verschwindet, innerhalb eines Parallelogramms, dessen Ecken o, $i\pi$, $a+i\pi$, a sind. Da $\vartheta(v)$ in diesem Parallelogramm nicht Unendlich wird, so wächst nach XI. $\lg\vartheta(v)$ um so viele ganze Multipla von $2\pi i$, wenn v in positiver



Richtung um die Begrenzung s des ein Stück „S" bildenden Parallelogramms herumgeführt wird*), als Puncte im Innern desselben vorhanden sind, für welche $\vartheta(v)$ verschwindet. Dieser Zuwachs ist aber

$$\int\limits_{(s)} d\lg\vartheta(v) = \int_0^{i\pi} d\lg\vartheta(v) + \int_{i\pi}^{a+i\pi} d\lg\vartheta(v) + \int_{a+i\pi}^{a} d\lg\vartheta(v) + \int_a^0 d\lg\vartheta(v)$$

$$= \int_0^{i\pi} d\lg\vartheta(v) + \int_0^a d\lg\vartheta(v+i\pi) + \int_{i\pi}^0 d\lg\vartheta(v+a) + \int_a^0 d\lg\vartheta(v)$$

$$= \int_0^{i\pi} d\lg\left(\frac{\vartheta(v)}{\vartheta(v+a)}\right) + \int_0^a d\lg\left(\frac{\vartheta(v+i\pi)}{\vartheta(v)}\right) = 2\int_0^{i\pi} dv = 2\pi i.$$

Es wird demnach, da nach Satz X. pag 21 eine gebrochene Ordnung unmöglich ist, $\vartheta(v)$ in jenem Parallelogramm nur an einer einzigen Stelle Null, und zwar in der ersten Ordnung.

Eine analoge Behandlung des Integrales $\int\lg\vartheta(v)\,dv$ liefert den Werth von v, für welchen $\vartheta(v)$ verschwindet; allein wir haben diesen schon früher in anderer Weise gefunden und da die Functionalgleichungen (1.) und (2.) die in dem Parallelogramm gegebene Function durch die ganze Ebene fortsetzen, so haben wir

$$(8.) \qquad \vartheta\left(\frac{2m+1}{2}a + \frac{2n+1}{2}i\pi\right) = 0$$

und *es verschwindet $\vartheta(v)$ für keinen andern Werth von v.*

Die ϑ-Functionen, in denen die Argumentwerthe halbe Perioden oder Moduln sind, lassen sich durch solche mit den Argumentwerthen 0 und veränderten Indices ausdrücken. Wir lassen die betreffenden Gleichungen hier folgen, und lassen dabei das Argument 0, wie auch später bei diesen Functionen immer, fort.

(9.)

$$\vartheta\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \vartheta_{01}, \quad \vartheta\left(\frac{a}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta_{10}, \quad \vartheta\left(\frac{a+i\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\vartheta_{01}\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \vartheta, \quad \vartheta_{01}\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \quad \vartheta_{01}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta_{10},$$

---

*) Sollte ein Punct auf die Begrenzung des Parallelogrammes fallen, so muss dieselbe durch parallele Ausbiegungen abgeändert werden.

$$\vartheta_{10}\left(\frac{i\pi}{2}\right)=0,\quad \vartheta_{10}\left(\frac{a}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta,\quad \vartheta_{10}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)=-ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta_{01},$$

$$\vartheta_{11}\left(\frac{i\pi}{2}\right)=\vartheta_{10},\ \vartheta_{11}\left(\frac{a}{2}\right)=ie^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta_{01},\ \vartheta_{11}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta.$$

Art. 2. Beziehungen zwischen den Quadraten der ϑ-Functionen. Das Produkt $\vartheta_{h,g}(u+v).\vartheta_{h',g'}(u-v)$.

Die Functionalgleichungen (1.) und (2.) bedürfen nur einer geringen Erweiterung, damit sie die wichtigsten Beziehungen zwischen den vier ϑ-Functionen liefern. Ist p eine ganze positive Zahl, so beweisen wir leicht den wichtigen Satz:

(10.) *Zwischen $p+1$ complexen, für endliche Werthe des Argumentes eindeutigen und stetigen, also auch endlichen Functionen, welche die Gleichungen*

(11.) $\varphi(v+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}.\varphi(v)$,

(12.) $\varphi(v+\varkappa a) = (-1)^{g\varkappa}.e^{-a\varkappa^2 p-2\varkappa vp}.\varphi(v)$

befriedigen, besteht stets eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, von denen einige auch Null sein können.

Offenbar genügt die Function $\vartheta_{h,g}(v).\vartheta^{p-1}(v)$ den Anforderungen (10.), (11.), (12.), und es steht daher (nach Satz XVII. pag. 26) a priori fest, dass $\varphi(v)$ nach auf- und absteigenden Potenzen von e^v in eine für alle endliche v convergente Reihe sich entwickeln lässt. Da die Gleichung (11.) von der Gleichung (1.) nicht verschieden ist, so hat die Reihe die Form

$$\varphi(v) = e^{hv}\sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{2nv}.$$

Die Gleichung (12.) auf diese Reihe angewendet, liefert

$$e^{hv+h\varkappa a}.\sum_{(n)\,-\infty}^{\infty} B_n e^{2nv+2n\varkappa a} = e^{-ap\varkappa^2-2p\varkappa v}.\sum_{(n)\,-\infty}^{\infty} B_n.e^{2nv+hv+g\varkappa i\pi}$$

$$= e^{-ap\varkappa^2+hv+g\varkappa i\pi}.\sum_{(n)\,-\infty}^{\infty} B_{n+\varkappa p}.e^{2nv},$$

in welcher letzten Gleichung die Zählung der Glieder um $p\varkappa$ verschoben ist. Hieraus folgt:

$$B_n e^{2n\varkappa a+h\varkappa a} = e^{-ap\varkappa^2+g\varkappa i\pi}.B_{n+\varkappa p},$$

$$B_{n+\varkappa p} = B_n.e^{ap\varkappa^2+2n\varkappa a+h\varkappa a+g\varkappa i\pi}.$$

Somit werden alle Coefficienten, die um p Glieder von einander

entfernt stehen, mit einander verknüpft. Ist r eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots p-1$, und setzt man $n = \varkappa p + r$, so erhält man

$$\varphi(v) = \sum_{0}^{p-1}{}_{(r)} \Big(B_r e^{hv} . \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(\varkappa)} e^{ap\varkappa^2 + 2r\varkappa a + 2p\varkappa v + 2rv + h\varkappa a + g\varkappa i\pi}\Big)$$

$$= \sum_{0}^{p-1}{}_{(r)} B_r e^{(2r+h)v} . \vartheta\Big(pv + \frac{2r+h}{2} a + g\frac{i\pi}{2}, \; pa\Big).$$

Die hierin vorkommenden ϑ-Functionen sind Potenzreihen, die alle verschiedene Potenzen von e^v enthalten, so dass keine lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen ihnen Statt hat. Demnach lässt sich jede Function $\varphi(v)$, welche den Gleichungen (11.) und (12.) Genüge leistet, durch p von einander unabhängige ϑ-Functionen linear und homogen ausdrücken, womit der Satz (10.) bewiesen ist.

Hiervon machen wir Anwendung für den Fall $p = 2$, welcher der einfachste ist. Zuerst ist

$$\vartheta^2_{h\,g}(v) = \alpha\,\vartheta^2_{h'\,g'}(v) + \beta\,\vartheta^2_{h''\,g''}(v),$$

weil zwischen den drei Quadraten nach (10.) eine lineare Beziehung Statt haben muss. Wir müssen natürlich voraussetzen, dass $h\,g$; $h'\,g'$; $h''\,g''$ von einander verschiedene Systeme der Indices sind, weil im andern Falle die Coefficienten aller drei Quadrate Null sein müssten. Da wir vier ϑ-Functionen haben, so können wir eine, etwa $\vartheta_{0\,1}(v)$ mit je zwei der drei anderen verbinden. Eine der drei so erhaltenen Gleichungen muss jedoch eine Folge der andern sein, weil sich aus je zweien eine der ϑ-Functionen eliminiren lässt. Wir betrachten daher nur die beiden Gleichungen:

$$\vartheta^2_{0\,1}(v) = \alpha'\vartheta^2_{1\,1}(v) + \beta'\vartheta^2_{1\,0}(v), \quad \vartheta^2_{0\,1}(v) = \alpha''\vartheta^2_{1\,1}(v) + \beta''\vartheta^2(v).$$

Für $v = 0$ haben wir

$$\beta' = \frac{\vartheta^2_{0\,1}}{\vartheta^2_{1\,0}}, \quad \beta'' = \frac{\vartheta^2_{0\,1}}{\vartheta^2}.$$

Für $v = \frac{i\pi}{2}$, $\quad \alpha' = \dfrac{\vartheta^2_{0\,1}\left(\frac{i\pi}{2}\right)}{\vartheta^2_{1\,1}\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta^2}{\vartheta^2_{1\,0}}.$

Für $v = \frac{a+i\pi}{2}$, $\quad \alpha'' = \dfrac{\vartheta^2_{0\,1}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)}{\vartheta^2_{1\,1}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta^2_{1\,0}}{\vartheta^2}.$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$(13.)\qquad \frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta^2} = k, \qquad \frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta^2} = k',$$

so haben wir hieraus

$$(14.)\qquad k.\vartheta_{01}^2(v) = \vartheta_{11}^2(v) + k'.\vartheta_{10}^2(v),$$

$$(15.)\qquad \vartheta_{01}^2(v) = k\vartheta_{11}^2(v) + k'\vartheta^2(v),$$

und setzen wir in der letzten Gleichung $v = \frac{1}{2}\pi i$, so liefert sie die wichtige Relation:

$$(16.)\quad \begin{cases} 1 = k.\dfrac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta^2} + k'\dfrac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta^2} = k^2 + k'^2, \\ \vartheta^4 = \vartheta_{10}^4 + \vartheta_{01}^4. \end{cases}$$

Die Function $\vartheta_{hg}(u+v)\vartheta_{h'g}(u-v)$ genügt sowohl als Function von u als auch von v den Functionalgleichungen (11.) und (12.), wenn dort $p = 2$ gesetzt wird.

Man hat deshalb

$$\vartheta_{11}(u+v)\vartheta_{01}(u-v) =$$
$$[\alpha_{11}\vartheta_{11}(v)\vartheta_{01}(v) + \alpha_{12}\vartheta_{10}(v)\vartheta(v)]\,\vartheta_{11}(u)\,\vartheta_{01}(u)$$
$$+ [\alpha_{21}\vartheta_{11}(v)\vartheta_{01}(v) + \alpha_{22}\vartheta_{10}(v)\vartheta(v)]\,\vartheta_{10}(u)\vartheta(u).$$

Für $v = 0$ haben wir

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\vartheta.\vartheta_{10}}, \quad \alpha_{22} = 0.$$

Für $v = \frac{1}{2}i\pi$

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{21} = \frac{1}{\vartheta.\vartheta_{10}}$$

und folglich

$$(17.)\qquad \vartheta.\vartheta_{10}.\vartheta_{11}(u+v)\vartheta_{01}(u-v) =$$
$$\vartheta_{10}(v)\vartheta(v)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{01}(u) + \vartheta_{10}(u)\vartheta(u)\vartheta_{11}(v)\vartheta_{01}(v),$$

und wenn man v in $-v$ verwandelt

$$(18.)\qquad \vartheta.\vartheta_{10}.\vartheta_{11}(u-v)\vartheta_{01}(u+v) =$$
$$\vartheta_{10}(v)\vartheta(v)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{01}(u) - \vartheta_{10}(u)\vartheta(u)\vartheta_{11}(v)\vartheta_{01}(v).$$

Dieselbe Methode liefert

$$(19.)\quad \vartheta_{01}^2.\vartheta_{01}(u+v)\vartheta_{01}(u-v) = \vartheta_{01}^2(u)\vartheta_{01}^2(v) - \vartheta_{11}^2(u)\vartheta_{11}^2(v).$$

Setzt man hierin $u + \frac{1}{2}\pi i$ für u, so folgt

$$(20.)\quad \vartheta_{01}^2.\vartheta(u+v).\vartheta(u-v) = \vartheta^2(u)\vartheta_{01}^2(v) - \vartheta_{10}^2(u)\vartheta_{11}^2(v).$$

Weiter ist

$$(21.)\qquad \vartheta_{10}.\vartheta_{01}.\vartheta_{10}(u+v).\vartheta_{01}(u-v) =$$
$$\vartheta_{10}(u)\vartheta_{01}(u).\vartheta_{10}(v)\vartheta_{01}(v) - \vartheta(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta(v)\vartheta_{11}(v),$$

und wenn man $-v$ für v setzt

(22.) $\vartheta_{10}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{10}(u-v)\,.\,\vartheta_{01}(u+v) =$

$\vartheta_{10}(u)\vartheta_{01}(u)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{01}(v)+\vartheta(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta(v)\vartheta_{11}(v).$

Endlich ist

(23.) $\vartheta\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta(u+v)\,.\,\vartheta_{01}(u-v) =$

$\vartheta(u)\vartheta_{01}(u)\vartheta(v)\vartheta_{01}(v)+\vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(v),$

(24.) $\vartheta\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta(u-v)\,.\,\vartheta_{01}(u+v) =$

$\vartheta(u)\vartheta_{01}(u)\vartheta(v)\vartheta_{01}(v)-\vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(v).$

Diese einfachen Formeln reichen hin, um die wichtigsten Sätze der Theorie der elliptischen Functionen herzuleiten, welche Functionen Quotienten zweier ϑ-Functionen sind.

Art. 3. Die elliptischen Functionen und ihr Additionstheorem.

Um unsere Formeln mit den in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen in Einklang zu bringen, führen wir die folgende neue Bezeichnung ein. Wir setzen

$$v = \frac{2\pi i}{\omega}x,\quad a = 2\pi i\frac{\omega'}{\omega},\quad \Theta_{hg}(x) = \vartheta_{hg}\left(\frac{2\pi i}{\omega}x,\ 2\pi i\frac{\omega'}{\omega}\right),$$

$$e^{2\pi i\frac{\omega}{\omega}} = q,$$

$$(25.)\quad \sin\operatorname{am}(x) = \lambda(x)^{*)} = \frac{\Theta_{11}(x)}{\sqrt{k}\,.\,\Theta_{01}(x)},$$

$$(26.)\quad \cos\operatorname{am}(x) = \mu(x) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\Theta_{10}(x)}{\Theta_{01}(x)},$$

$$(27.)\quad \Delta\operatorname{am}(x) = \nu(x) = \sqrt{k'}\,.\,\frac{\Theta(x)}{\Theta_{01}(x)}.$$

Für positiv reelle Werthe von x, ω und q (es muss norm (q) immer <1 sein), haben die vier Θ-Functionen positiv reelle Werthe, wenn x klein genug genommen wird, wie man aus den Reihen erkennt:

$$\Theta(x) = \sum_{(m)}^{\infty}\!{}_{-\infty}\, q^{m^2}.\,e^{2m\frac{2i\pi}{\omega}x} = 1+\sum_{(m)1}^{\infty} q^{m^2}\left(e^{2m\frac{2\pi i}{\omega}x}+e^{-2m\frac{2\pi i}{\omega}x}\right),$$

---

*) Diese Bezeichnung, — wenn sie mit der für die elliptischen Functionen gebräuchlichen übereinstimmen soll, — ist nur dann anwendbar, wenn $\lambda'(0)=1$ ist. Ist $\lambda'(0)=\varrho$, so muss $\dfrac{\Theta_{11}(x)}{\sqrt{k}\,\Theta_{01}(x)} = \lambda(\varrho x)$ gesetzt werden.

$$(28.)\quad \begin{cases} \Theta(x) = 1+2\sum_{(m)1}^{\infty} q^{m^2}\cos\left(\frac{4m\pi}{\omega}x\right), \\ \Theta_{10}(x) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{(m)0}^{\infty} q^{m.(m+1)}\cos\left(2\frac{2m+1}{\omega}\pi x\right), \\ \Theta_{01}(x) = 1+2\sum_{(m)1}^{\infty}(-1)^m q^{m^2}\cos\left(\frac{4m}{\omega}\pi x\right), \\ \Theta_{11}(x) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{(m)0}^{\infty}(-1)^m . q^{m(m+1)}. \sin\left(2\frac{2m+1}{\omega}\pi x\right). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (14.) und (15.) folgt in unserer neuen Bezeichnung

(29.) $1 = \sin \mathrm{am}^2(x) + \cos \mathrm{am}^2(x)$, oder $\lambda^2(x)+\mu^2(x) = 1$,

(30.) $1 = \Delta\, \mathrm{am}^2(x) + k^2 \sin \mathrm{am}^2(x)$, oder $\nu^2(x)+k^2\lambda^2(x) = 1$.

Es sind aber $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ doppelt periodische Functionen, indem

(31.) $\lambda(x+\omega) = \lambda(x)$, $\lambda(x+\omega') = \lambda(x)$, $\lambda(x+\frac{1}{2}\omega) = -\lambda(x)$,
$\mu(x+\omega) = \mu(x)$, $\mu(x+\omega') = -\mu(x)$, $\mu(x+\frac{1}{2}\omega) = -\mu(x)$,
$\nu(x+\omega) = \nu(x)$, $\nu(x+\omega') = -\nu(x)$, $\nu(x+\frac{1}{2}\omega) = \nu(x)$

ist. ω und ω' heissen die Perioden der Function $\lambda(x)$ oder $\sin \mathrm{am}(x)$, $\mu(x)$ hat die Perioden ω und $\omega'+\frac{1}{2}\omega$, $\nu(x)$ hat die Perioden $\frac{1}{2}\omega$ und $2\omega'$. In diesen doppelt periodischen Functionen muss $2\pi i\frac{\omega'}{\omega}$ einen negativen reellen Theil besitzen, also $\frac{\omega'}{\omega}$ einen positiven imaginären, weil sonst die Θ-Reihen nicht convergiren. Da eine Periode ω auch eine Periode $-\omega$ ist, so kommt es nur darauf an, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht eine reelle Zahl ist. In der That aber

(32.) „Eine einwerthige doppelt periodische complexe Function, deren Perioden in einem reellen Verhältnisse zu einander stehen, existirt nicht.“

Denn da auch $\Omega = m\omega + n\omega'$ als Periode angesehen werden kann, wenn ω und ω' die gegebenen sind, so kann man, wenn ω und ω' commensurabel sind, also etwa $\omega = m'\Omega$, $\omega' = n'\Omega$ ist, m und n so wählen, dass $mm'+nn' = 1$ ist, und es ist dann $m\omega+n\omega' = (mm'+nn')\Omega = \Omega$ die einzige Periode der Function. Wenn aber ω und ω' incommensurabel sind, so kann man eine Periode $\Omega = m\omega+n\omega'$ von beliebiger Kleinheit herstellen. Also müssten die Werthe der Function in

beliebig kleinen Intervallen wiederkehren. Eine solche Function, wenn sie nicht constant ist, würde in jedem noch so kleinen Ebenenstück um ein Endliches von einander verschiedene Werthe besitzen, und mithin überall unstetig sein, also den Charakter einer Function der complexen Variabeln x nicht besitzen.

Alle drei Functionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ werden unendlich gross für $x = \frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{2}m\omega + n\omega'$, $\lambda(x)$ ist eine ungerade Function und verschwindet für $x = \frac{1}{2}m\omega + n\omega'$, $\mu(x)$ ist eine gerade Function und verschwindet für $x = \frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}m\omega + n\omega'$, $\nu(x)$ ist eine gerade Function und verschwindet für $x = \frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}m\omega + n\omega'$, und es ist

$$(33.)\quad \mu(0) = 1, \quad \nu(0) = 0, \quad \mu'(0) = 0, \quad \nu'(0) = 0,$$
$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \ \mu\left(\frac{\omega}{4}\right) = 0, \ \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = k';$$
$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}, \ \mu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{k'i}{k}, \ \nu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = 0.$$

Das Additionstheorem der doppelt periodischen Functionen $\lambda(x)$ erhält man durch Division der Gleichung (19.) in die (17.). Es folgt durch Einführung der neuen Bezeichnung in diese Gleichungen:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{01}}\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{01}}.\lambda(x+\xi) = \frac{\dfrac{\Theta_{11}(x)\,\Theta_{01}(x)\,\Theta_{10}(\xi)\,\Theta(\xi) + \Theta_{10}(x)\,\Theta(x)\,\Theta_{11}(\xi)\,\Theta_{01}(\xi)}{\Theta^2_{01}(\xi)\,\Theta^2_{01}(x)}}{\dfrac{\Theta^2_{01}(x)\,\Theta^2_{01}(\xi) - \Theta^2_{11}(x)\,\Theta^2_{11}(\xi)}{\Theta^2_{01}(x).\Theta^2_{01}(\xi)}}$$

und mit (13.)

$$(34.)\quad \lambda(x+\xi) = \frac{\lambda(x)\,\mu(\xi)\,\nu(\xi) + \lambda(\xi)\,\mu(x)\,\nu(x)}{1-k^2\lambda^2(x)\,\lambda^2(\xi)}.$$

Dividirt man die Gleichung (21.) durch die (19.), so erhält man in ähnlicher Weise

$$(35.)\quad \mu(x+\xi) = \frac{\mu(x)\,\mu(\xi) - \nu(x)\,\nu(\xi)\,\lambda(x)\,\lambda(\xi)}{1-k^2\lambda^2(x)\,\lambda^2(\xi)},$$

und wenn man mit (19.) in (23.) dividirt,

$$(36.)\quad \nu(x+\xi) = \frac{\nu(x)\,\nu(\xi) - k^2\mu(x)\,\mu(\xi)\,\lambda(x)\,\lambda(\xi)}{1-k^2\lambda^2(x).\lambda^2(\xi)},$$

woraus für $\xi = x$ die Gleichungen fliessen:

$$(37.)\quad \begin{cases} \lambda(2x) = \dfrac{2\lambda(x)\mu(x)\nu(x)}{1-k^2\lambda^4(x)}, \quad \mu(2x) = \dfrac{\mu^2(x)-\lambda^2(x)\nu^2(x)}{1-k^2\lambda^4(x)}, \\ \nu(2x) = \dfrac{\nu^2(x)-k^2\mu^2(x)\lambda^2(x)}{1-k^2\lambda^4(x)}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen stellt man leicht die folgende Tabelle her, in welcher nur die Bestimmung der Vorzeichen einige Schwierigkeiten macht. Nimmt man k als positiv reell und kleiner als 1, und ebenso k' positiv an, so sind die sämmtlichen darin vorkommenden Wurzeln so zu nehmen, dass der reelle Theil ihres Werthes positiv ist, wodurch sie völlig bestimmt sind.

Es sind in dieser Tabelle die Werthe $\lambda\left(m\frac{\omega}{8}+n\frac{\omega'}{4}\right)$ enthalten und zwar entnimmt man diesen Werth aus der m^{ten} Horizontalreihe und der n^{ten} Vertikalreihe der durch die beiden Striche begrenzten Reihen z. B. $\lambda(0)=0$, $\lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\left(2\frac{\omega}{8}+2\frac{\omega'}{4}\right) = \frac{1}{k}$. Die Werthe für $m>4$ oder $n>4$ findet man aus der Periodicität der Function $\lambda(x)$.

(38.)

x	$0,$	$\frac{\omega'}{4},$	$\frac{\omega'}{2},$	$\frac{3\omega'}{4}$
0	$0,$	$\frac{i}{\sqrt{k}},$	$\infty,$	$\frac{-i}{\sqrt{k}}$
$\frac{\omega}{8}$	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}},$	$\sqrt{\frac{k+ik'}{k}},$	$\sqrt{\frac{1}{1-k'}},$	$\sqrt{\frac{k-ik'}{k}}$
$\frac{\omega}{4}$	$1,$	$\frac{1}{\sqrt{k}},$	$\frac{1}{k},$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$
$\frac{3\omega}{8}$	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}},$	$\sqrt{\frac{k-ik'}{k}},$	$\sqrt{\frac{1}{1-k}},$	$\sqrt{\frac{k+ik'}{k}}$
$\frac{\omega}{2}$	$0,$	$\frac{-i}{\sqrt{k}},$	$\infty,$	$\frac{i}{\sqrt{k}}$

Art. 4. Die Differentialgleichungen der elliptischen Functionen und der Thetafunctionen. Die elliptischen Integrale erster Gattung.

Setzen wir in dem Additionstheorem (34.) dx für ξ und bezeichnen mit $\lambda'(x)$, $\mu'(x)$, $\nu'(x)$, $\Theta'_{hg}(x)$ die ersten Differentialquotienten von λ, μ, ν, Θ_{hg} nach x, und mit $\vartheta'_{hg}(v)$

den ersten Differentialquotienten von $\vartheta_{h\,g}(v)$ nach v, so haben wir

$$\lambda'(x)dx = \lambda(dx).\mu(x).\nu(x) = \lambda'(0).\mu(x).\nu(x)\,dx$$

oder

$$(39.)\qquad \frac{d\lambda(x)}{dx} = \lambda'(0)\sqrt{[1-\lambda^2(x)].[1-k^2\lambda^2(x)]},$$

woraus mit Fortlassung des Argumentes x hinter dem Zeichen λ sich die Gleichung ergiebt:

$$dx = \frac{d\lambda}{\lambda'(0)\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}},\qquad x = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda'(0)\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}},$$

worin die zweiwerthige Function $\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}$ für $\lambda = 0$ den Zweigwerth $+1$ hat, weil für $x = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$ ist.

Die Differentialgleichung (39.) oder das Integral derselben wird noch vereinfacht, wenn man $\lambda'(0) = 1$ setzt. Da

$$\lambda'(0) = \frac{\Theta'_{1\,1}(0)}{\Theta_{0\,1}(0)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi i}{\omega}\cdot\frac{\vartheta'_{1\,1}\cdot\vartheta}{\vartheta_{0\,1}\cdot\vartheta_{1\,0}}$$

ist, so geschieht dies dadurch, dass man

$$(40.)\qquad \omega = \frac{2\pi i.\vartheta'_{1\,1}\cdot\vartheta}{\vartheta_{0\,1}\cdot\vartheta_{1\,0}}$$

setzt, wodurch die Variabilität von $a = 2\pi i\frac{\omega'}{\omega}$ nicht im mindesten beschränkt wird, also auch k noch völlig willkürlich bleibt. Unter dieser Voraussetzung ist nun

$$(41.)\qquad x = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu},$$

welches die kanonische Form des sogenannten elliptischen Integrales erster Gattung ist. Die Umkehrung dieses elliptischen Integrals, d. h. die obere Grenze λ, als Function des Werthes x des Integrales, heisst eine elliptische Function und wird von Jacobi mit Sinus Amplitudo x ($\sin\mathrm{am}\,x$) bezeichnet. Charakteristisch ist für das Integral (41.)

dass es für keinen Werth von λ unendlich wird,

wenn nicht diese Variabele (oder der Integrationsweg) unendlich oft um die Puncte ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ herumgeführt wird, was wir pag. 65 et seqq. erörtert haben.

Will man nun ein Integral, welches mit einem willkürlichen Modul k vorgegeben ist, mittels der ϑ-Functionen um-

kehren, so wird es darauf ankommen, ω und ω' als Functionen von k auszudrücken. Nun nimmt aber λ für $x = \frac{1}{4}\omega$ den Werth 1 an. Demnach ist $\frac{1}{4}\omega$ der Zuwachs, welchen x erfährt, wenn λ von 0 bis 1 geführt wird, oder

$$(42.)\qquad \frac{\omega}{4} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}},$$

dabei bleibt es aber noch unbestimmt, auf welchem Wege λ von 0 nach 1 geführt wird. Ist nämlich der Werth des Integrals $\int_0^1 \frac{d\lambda}{\mu . \nu}$ über die positive reelle Achse der die Werthe λ darstellenden Ebene erstreckt $\frac{1}{4}\Omega$, und der Werth $\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\mu . \nu}$ auf geradem Wege von 1 bis $\frac{1}{k}$ erstreckt $\frac{1}{2}\Omega'$, so kann

$$\tfrac{1}{4}\omega = \tfrac{1}{4}\Omega + m\Omega + m'\Omega'$$

sein, weil für alle in dieser Form enthaltenen Werthe von x λ den Werth 1 besitzt.

Für $x = \frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}\omega'$ nimmt λ den Werth $\frac{1}{k}$ an, demnach ist $\frac{1}{2}\omega'$ der Zuwachs, den x erfährt, wenn λ von 1 nach $\frac{1}{k}$ geführt wird, oder

$$(43.)\qquad \frac{\omega'}{2} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}.$$

Dabei bleibt wiederum der Weg unbestimmt, über welchen λ geführt, oder das Integral erstreckt wird. Es kann daher

$$\tfrac{1}{2}\omega' = \tfrac{1}{2}\Omega' + n\Omega + n'\Omega'$$

sein. Die ganzen Zahlen m, m', n, n' sind nicht ganz willkürlich, $\lambda(x)$ muss jedenfalls die Perioden Ω und Ω' haben, und ω offenbar in der Form $m\Omega + m'\Omega'$, ω' in der Form $n\Omega + n'\Omega'$ enthalten sein. Vorläufig begnügen wir uns, ω mit Ω, ω' mit Ω' zusammenfallen zu lassen, so dass ω für reelle k, welche kleiner als 1 sind, positiv reell, und ω' positiv imaginär ist. Es wird sich später bei der Transformation ergeben, dass für ω, ω' sich in der That unendlich viel verschiedene Perioden in der Form $m\Omega + m'\Omega'$, $n\Omega + n'\Omega'$ wählen lassen, wenn man die Function λ als Function von x durch einen Quotienten zweier ϑ-Functionen darstellen will.

Entwickelt man, unter der Voraussetzung, dass ω, ω' mit Ω, Ω' zusammenfallen, ω nach Potenzen von k^2, und ω' nach Potenzen von $1-k^2$, so sind die Entwickelungen hypergeometrische Reihen, und zwar ist (unter Anwendung der Gauss'schen Bezeichnung)

$$\omega = 2\pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, k^2), \quad \omega' = i\pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1-k^2),$$

woraus der Theorie jener Reihen gemäss folgt, dass ω, ω' partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} + (1-3k^2)\frac{\partial\omega}{\partial k} - k\omega = 0$$

sind.

Aus den Additionstheoremen (35.) und (36.) findet man für μ und ν die Differentialgleichungen

$$(44.)\quad \mu' = -\lambda.\nu, \quad \nu' = -k^2.\lambda.\mu.$$

Die Eigenschaft der ϑ-Functionen, die elliptischen Integrale umzukehren, ist es vornehmlich, welche ihnen so grosse Bedeutung in der Analysis verschafft. Man kann durch sie auch die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung ausdrücken. Bei Entwicklung dieser Darstellungen treten noch viele bemerkenswerthe Eigenschaften der ϑ-Functionen hervor, weshalb sie hier nicht fehlen darf. Als Vorbereitung stellen wir die Function $\frac{\partial^2 \lg\vartheta_{h\,g}(v)}{\partial v^2}$ durch ϑ-Quotienten dar. Diese Function hat sowohl die Periode $i\pi$, als auch die Periode a, und ist demnach doppelperiodisch d. h. es ist

$$\frac{\partial^2 \lg\vartheta_{h\,g}(v+mi\pi+na)}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \lg\vartheta_{h\,g}(v)}{\partial v^2}.$$

Differenziren wir den Logarithmusweg, so haben wir

$$\frac{\partial^2 \lg\vartheta_{h\,g}(v)}{\partial v^2} = \frac{\overset{\prime\prime}{\vartheta}_{hg}(v).\vartheta_{h\,g}(v) - \overset{\prime}{\vartheta}_{h\,g}(v).\overset{\prime}{\vartheta}_{h\,g}(v)}{\vartheta^2_{h\,g}(v)}.$$

Da nun dieser Quotient doppelperiodisch ist, der Nenner aber den Functionalgleichungen (11.) und (12.) Genüge leistet, wenn dort $p=2$, $h=g=0$ genommen wird, so muss der Nenner ebenfalls dieser Functionalgleichung genügen, und wir können daher setzen

$$\overset{\prime\prime}{\vartheta}_{h\,g}(v)\vartheta_{h\,g}(v) - \overset{\prime}{\vartheta}_{h\,g}(v).\overset{\prime}{\vartheta}_{h\,g}(v) = \alpha\vartheta^2_{h\,g}(v) + \beta\vartheta^2_{1\,1}(v),$$

wenn wir nur voraussetzen, dass $(h\,g) \lesseqgtr (1\,1)$, also $\vartheta_{h\,g}(v)$ eine der drei geraden ϑ-Functionen sei, deren erster Differentialquotient mit dem Argument verschwindet. Dann haben wir

für $v = 0$, $\qquad \alpha = \dfrac{\vartheta''_{h\,g}}{\vartheta_{h\,g}}$,

für $v = -\dfrac{ha + gi\pi}{2} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{i\pi}{2}$, $\quad \beta = -\dfrac{\vartheta'^2_{h\,g}\left(-\frac{h-1}{2}a - \frac{g-1}{2}i\pi\right)}{\vartheta^2_{1\,1}\left(-\frac{h-1}{2} - \frac{g-1}{2}i\pi\right)}$.

Demnach ist für $h = 0$, $g = 1$

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{0\,1}(v)}{\partial v^2} = \frac{\vartheta''_{0\,1}}{\vartheta_{0\,1}} - \left(\frac{\vartheta'_{0\,1}(\frac{1}{2}a)}{\vartheta_{1\,1}(\frac{1}{2}a)}\right)^2 \frac{\vartheta^2_{1\,1}(v)}{\vartheta^2_{0\,1}(v)}$$

und da $\vartheta'_{0\,1}(\frac{1}{2}a) = ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta'_{1\,1}$, $\quad \vartheta_{1\,1}(\frac{1}{2}a) = ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta_{0\,1}$, $\vartheta'_{1\,1} = \dfrac{\omega.\sqrt{k}}{2\pi i}.\vartheta_{0\,1}$ (nach pag. 97) ist, so kann man schreiben

$$(45.)\qquad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_{0\,1}(v)}{\partial v^2} = \frac{\vartheta''_{0\,1}}{\vartheta_{0\,1}} + \frac{\omega^2 k}{4\pi^2}.\frac{\vartheta^2_{1\,1}(v)}{\vartheta^2_{0\,1}(v)},$$

und wenn wir darin $v + \frac{1}{2}a$ statt v setzen,

$$(46.)\qquad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_{1\,1}(v)}{\partial v^2} = \frac{\vartheta''_{0\,1}}{\vartheta_{0\,1}} + \frac{\omega^2 k}{4\pi^2}.\frac{\vartheta^2_{0\,1}(v)}{\vartheta^2_{1\,1}(v)}$$

oder wenn wir in (45.) $v + \frac{1}{2}i\pi$ statt v setzen

$$(47.)\qquad \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v)}{\partial v^2} = \frac{\vartheta''_{0\,1}}{\vartheta_{0\,1}} - \frac{\omega^2 k}{4\pi^2}.\frac{\vartheta^2_{1\,0}(v)}{\vartheta^2(v)}.$$

Führen wir hier die $\Theta(x)$ ein, so erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass $\vartheta''_{0\,1} = \dfrac{\Theta''_{0\,1}}{\left(\frac{2\pi i}{\omega}\right)^2}$ ist,

$$(48.)\qquad \frac{\partial^2 \lg \Theta_{0\,1}(x)}{\partial x^2} = \frac{\Theta''_{0\,1}}{\Theta_{0\,1}} - k^2\lambda^2(x),$$

$$(49.)\qquad \frac{\partial^2 \lg \Theta_{1\,1}(x)}{\partial x^2} = \frac{\Theta''_{0\,1}}{\Theta_{0\,1}} - \frac{1}{\lambda^2(x)},$$

$$(50.)\qquad \frac{\partial^2 \lg \Theta(x)}{\partial x^2} = \frac{\Theta''_{0\,1}}{\Theta_{0\,1}} + \frac{k^2\mu^2(x)}{\nu^2(x)} = \frac{\Theta''_{0\,1}}{\Theta_{0\,1}} + 1 - \frac{k'^2}{\nu^2(x)}.$$

Art. 5. Darstellung der elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung durch Θ-Functionen.

Setzen wir nun die Constante $\dfrac{\Theta''_{0\,1}}{\Theta_{0\,1}} + 1$ gleich c, $c - k'^2 = c'$ und integriren die Gleichung (50.), so folgt aus ihr:

$$(51^a.)\quad \frac{\partial \lg \Theta(x)}{\partial x} = cx - k'^2 \int_0^x \frac{dx}{\nu^2(x)} = cx - k'^2 \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu^3}$$

$$= c'x - \frac{2k^2 k'^2 \partial}{\partial(k^2)} \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu} = c'x - 2k^2 k'^2 \frac{\partial x}{\partial(k^2)},$$

woraus für $x = \frac{1}{4}\omega$ fliesst:

$$\frac{c'\omega}{2} = \frac{k^2 k'^2 \partial\omega}{\partial(k^2)} \text{ oder } c' = 2k^2 \frac{k'^2}{\omega} \frac{\partial\omega}{\partial(k^2)},$$

so dass wir endlich die Gleichung erhalten

$$(51.)\quad \frac{\partial \lg \Theta(x)}{\partial x} = 2k^2 k'^2 \left(x \frac{\partial \lg \omega}{\partial(k^2)} - \frac{\partial x}{\partial(k^2)} \right) = \frac{-\omega k^2 k'^2}{\pi i} \frac{\partial \frac{2\pi i}{\omega} x}{\partial(k)^2},$$

woraus für $x = \omega'$ folgt: $-\frac{4\pi i}{\omega} = -\frac{\omega k^2 k'^2}{\pi i} \frac{\partial \frac{2\pi i \omega'}{\omega}}{\partial(k^2)}$ oder

$$(52.)\quad \frac{\partial a}{\partial(k^2)} = \frac{-4\pi^2}{\omega^2 k^2 k'^2}.$$

Durch Differenziren leitet man aus (51.) ab

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta(v)}{\partial v^2} \left(\frac{2\pi i}{\omega} \right)^2 = -\frac{\omega k^2 k'^2}{\pi i} \cdot \frac{\partial^2 \frac{2\pi i}{\omega} x}{\partial(k^2).\partial\lambda} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$= \frac{\omega k^2 k'^2}{\pi i} \frac{\partial \frac{2\pi i}{\omega.\mu.\nu}}{\partial(k^2)} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{\omega k^2 k'^2}{\pi i.\mu.\nu} \left(\frac{\mu\nu \partial \frac{2\pi i}{\omega}}{\partial(k^2)} - \frac{2\pi i}{\omega} \cdot \frac{\partial(\mu.\nu)}{\partial(k^2)} \right)$$

$$= -2k^2 k'^2 \frac{\partial \lg \frac{2\pi i}{\omega.\mu.\nu}}{\partial(k^2)}.$$

Nun ist nach (3.) pag. 87 für $x = 0$: $\frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial v^2} = \frac{4 \partial \lg \vartheta}{\partial a}$, $\mu.\nu = 1$, und daher fliesst aus den letzten Gleichungen

$$\frac{2 \partial \lg \vartheta}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial(k^2)} = -\frac{\partial \lg \frac{2\pi i}{\omega}}{\partial(k^2)} = \frac{2 \partial \lg \vartheta}{\partial(k^2)} \text{ oder}$$

$$\vartheta = \text{Const.} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}.$$

Für $k = 0$ ist $\omega = 4 \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = 2\pi$,

$$\omega' = \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = i \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = i\infty,$$

also $a = -\infty$, $\vartheta = 1$ und daher Const. $= 1$ und

$$(53.)\quad \vartheta = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}},\quad \vartheta_{01} = \sqrt{\frac{\omega k'}{2\pi}},\quad \vartheta_{10} = \sqrt{\frac{\omega k}{2\pi}},$$

$$(54.)\quad i\vartheta'_{11} = \vartheta . \vartheta_{01} . \vartheta_{10},$$

welche drei letzten Gleichungen aus (13.) pag. 92 und aus der Gleichung $\omega = \frac{2\pi i \vartheta'_{11}}{\sqrt{k} . \vartheta_{01}}$ (pag. 97) folgen.

Durch die Gleichung (51.) ist ein Integral *zweiter Gattung*, *d. h. ein Integral, welches für bestimmte Werthe der obern Grenze* $\left(\text{hier } +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$ *wie eine algebraische Function unendlich gross wird* $\left(\text{hier wie } \frac{1}{\sqrt{1-k^2\lambda^2}}\right)$ *durch ϑ-Functionen* ausgedrückt.

Dasjenige Integral zweiter Gattung jedoch, auf welches nach Jacobi solche Integrale zurückgeführt zu werden pflegen, ist nicht $\frac{\partial \frac{2\pi i x}{\omega}}{\partial k^2}$, sondern

$$\int_0^\lambda \frac{\lambda^2 . d\lambda}{\mu . \nu} = \int_0^x \lambda^2(x) . dx.$$

Wir erhalten hierfür einen Ausdruck durch Θ-Functionen, wenn wir die Gleichung (48.) integriren, nämlich

$$(55.)\quad \int_0^x \lambda^2(x)\, dx = \frac{x}{k^2}\frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \frac{\partial \lg \Theta_{01}(x)}{k^2 \partial x}.$$

Zu Ausdrücken der Integrale dritter Gattung durch ϑ-Functionen, d. h. der Integrale, welche wie *ein Logarithmus Unendlich werden*, gelangt man folgendermaassen.

Man dividirt die Gleichung (19.) durch $\vartheta^2_{01}(u) . \vartheta^2_{01}(v)$, so ist

$$\vartheta^2_{01} . \frac{\vartheta_{01}(u+v)\,\vartheta_{01}(u-v)}{\vartheta_{01}(u)\,\vartheta_{01}(v)} = 1 - \frac{\vartheta^2_{11}(u)}{\vartheta^2_{01}(u)} . \frac{\vartheta^2_{11}(v)}{\vartheta^2_{01}(v)},$$

oder

$$\frac{\omega k'}{2\pi} . \frac{\Theta_{01}(x+\xi)\,\Theta_{01}(x-\xi)}{\Theta^2_{01}(x)\,\Theta^2_{01}(\xi)} = 1 - k^2\lambda^2(x)\lambda^2(\xi),$$

woraus wir durch logarithmisches Differenziren nach ξ erhalten

$$\frac{\Theta'_{01}(x+\xi)}{\Theta_{01}(x+\xi)} - \frac{\Theta'_{01}(x-\xi)}{\Theta_{01}(x-\xi)} - \frac{2\Theta'_{01}(\xi)}{\Theta_{01}(\xi)} = -\frac{2k^2\lambda^2(x)\lambda(\xi)\lambda'(\xi)}{1-k^2\lambda^2(x)\lambda^2(\xi)}$$

$$= -\frac{2\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)} . \frac{1-[1-k^2\lambda^2(x)\lambda^2(\xi)]}{1-k^2\lambda^2(x) . \lambda^2(\xi)}.$$

Integriren wir nun über x, so erhalten wir weiter

$$\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)}\int_0^x \frac{dx}{1-k^2\lambda^2(x)\lambda^2(\xi)} =$$

$$x\left(\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)}+\frac{\Theta'_{0\,1}(\xi)}{\Theta_{0\,1}(\xi)}\right)+\tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{\Theta_{0\,1}(x-\xi)}{\Theta_{0\,1}(x+\xi)}\right),$$

oder in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise

$$(56.)\quad \Pi(x,\xi)=\int_0^x \frac{k^2\lambda(\xi)\mu(\xi)\nu(\xi)\lambda^2(x).dx}{1-k^2\lambda^2(x)\lambda^2(\xi)}=$$

$$x\frac{d\lg\Theta_{0\,1}(\xi)}{d\xi}+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_{0\,1}(x+\xi)}{\Theta_{0\,1}(x-\xi)}.$$

Hierzu fügen wir noch die Legendre'sche Bezeichnung der drei elliptischen Integrale, welcher sie dadurch transformirte, dass er in ihnen $\lambda(x)$ durch $\sin\varphi$ ersetzte, und nun

$$(57.)\quad \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu}=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\varphi,k)$$

schrieb. Als die kanonische Form des elliptischen Integrales zweiter Gattung wählte er die

$$(58.)\quad E(\varphi,k)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.d\varphi,$$

welches Integral eine einfache geometrische Bedeutung hat. Zieht man über der grossen Achse einer Ellipse, welche die Excentricität k hat, als Durchmesser einen Kreis, und zieht man einen Radius in diesem Kreise, der mit der kleinen Achse den Winkel φ macht, und fällt vom Endpuncte desselben ein Loth auf die grosse Achse, so schneidet dieses Loth von der Ellipse einen Bogen ab, der von dem Endpuncte der kleinen Achse an gerechnet, die Grösse $A.E(\varphi,k)$ hat. Hiervon rührt der Name „elliptische Integrale" her.

In der Legendre'schen Bezeichnung ist das Jacobi'sche Integral zweiter Gattung

$$\int_0^\lambda \frac{\lambda^2.d\lambda}{\mu.\nu}=\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int_0^\lambda \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{k^2}F(\varphi,k)-\frac{1}{k^2}E(\varphi,k).$$

Im Integral dritter Gattung setzt Legendre $\lambda(\xi) = a$ und schreibt

$$(59.)\quad \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu\nu.[1-k^2\lambda^2(x)\lambda^2(\xi)]} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-a^2k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(\varphi, k, a).$$

Mit $Z(x)$ bezeichnet Jacobi die Function $\frac{d \lg \Theta_{01}(x)}{dx}$, welche sich von dem Integral zweiter Gattung unter (55.) nur durch ein mit einer Constanten multiplicirtes Integral erster Gattung unterscheidet. Aus der Gleichung (56.) ergiebt sich sofort die Gleichung

$$(60.)\quad \Pi(x, \xi) - \Pi(\xi, x) = \xi Z(x) - x Z(\xi),$$

durch welche die *Vertauschung von Parameter* (ξ) *und Argument* (x) bewirkt wird.

Die Perioden bezeichnet Jacobi so, dass er

$$\omega = 4K, \quad \omega' = 2iK'$$

setzt.

Art. 6. Darstellung der ϑ-Functionen durch unendliche Produkte.

Ehe noch die Darstellung der ϑ-Functionen durch unendliche Reihen bekannt war, hatten Abel und Jacobi schon die elliptischen Functionen durch unendliche Producte dargestellt, und dadurch, dass Jacobi Zähler und Nenner dieser Functionen für sich betrachtete, sind die ϑ-Functionen entstanden. Wir haben hier die Reihenform als die erste hingestellt, einmal weil diese einer Verallgemeinerung, wie sie für die Behandlung der Abel'schen Functionen nöthig wird, leicht fähig ist, während etwas Aehnliches für die Productform bis jetzt noch nicht möglich gewesen ist. Sodann sind ja aber für alle Functionen die Darstellungen durch Reihen, wenn sie möglich sind, stets als die fundamentalen betrachtet worden. Es sollen nun aber die Productformen aus den Reihen abgeleitet werden, wozu wir uns des Satzes XXIV. pag. 54 bedienen.

Um diesen auf die Function $\vartheta(v)$ anzuwenden, setzen wir

$$v = i \arcsin x.$$

Es wird $\arcsin x$ unendlich gross nur für $x = \infty$, und es gehören zu jedem Werthe von x zwei Werthreihen von v, weil $\arcsin x$ eine unendlich vieldeutige Function [wie $\lg(x)$]

ist. Ist nämlich für $x = x_1$ ein Werth von $v = v_1$, so kann man, wenn man die Variabele x um die Puncte ± 1 mehrere Male herum nach x_1 zurückführt*), dort zu den Werthen

$$v_1 + 2\pi i m, \quad (2n+1)\, i\pi - v_1$$

gelangen. Für alle die Werthe nimmt aber $\vartheta(v)$ wegen (1.) einen und denselben Werth an, sie ist demnach eine einwerthige Function von $x = \sin(-vi)$.

Allen Werthen von v, welche die Form

$$v + 2im\pi, \quad -v + (2n+1)\, i\pi$$

haben, entspricht umgekehrt ein einziger Werth von x.

Die Function $\vartheta(v)$ verschwindet nun nach pag. 89, (8.) für

$$v = \frac{2m+1}{2}a + \frac{i\pi}{2} + 2n\pi i, \text{ und } \vartheta = \frac{2m+1}{2}a - \frac{i\pi}{2} + 2ni\pi,$$

und nur für diese Werthe, wenn m, n alle ganzen positiven und negativen Zahlen durchlaufen. Diese beiden Grössenreihen ordnen wir nun so an,

$$\frac{2m+1}{2}a + \frac{i\pi}{2} + 2ni\pi, \qquad \frac{2m+1}{2}a - \frac{i\pi}{2} + 2ni\pi,$$

$$-\frac{2m+1}{2}a - \frac{i\pi}{2} + (2n+1)\, i\pi, \qquad -\frac{2m+1}{2}a + \frac{i\pi}{2} + (2n+1)\, i\pi,$$

für $m = 0, 1 \ldots \infty$. So gehören zur ersten Vertikalreihe die Werthe $x = \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{\pi}{2}\right)$, zur zweiten $x = \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{\pi}{2}\right)$, für welche $\vartheta(i \arcsin x)$ verschwindet, und zwar in der ersten Ordnung, weil $\frac{\partial \vartheta(i \arcsin x)}{\partial x}$ für alle diese Werthe von 0 und ∞ verschieden bleibt.

Da nun $\vartheta(i \arcsin x)$ für keinen endlichen Werth von x

---

*) Da $\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist, dies Integral aber aus dem $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ dadurch hervorgeht, dass man $k = 0$ setzt, so folgt dies unmittelbar aus dem pag. 73 Gesagten, wenn man beachtet, dass für $\frac{1}{4}\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ zu setzen ist.

unendlich gross wird, so ist nach XXIV. im Innern eines Stückes „S"

$$\frac{\vartheta(i \arc\sin x)}{\vartheta(0)} =$$

$$\prod_0^\infty{}_{(m)} \frac{x - \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{1}{2}\pi\right)}{-\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{1}{2}\pi\right)} \cdot \prod_0^\infty{}_{(m)} \frac{x - \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{1}{2}\pi\right)}{-\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{1}{2}\pi\right)}$$

$$= \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{x}{\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{1}{2}\pi\right)}\right) \cdot \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{x}{\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{1}{2}\pi\right)}\right)$$

$$= \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{x^2}{\cos^2 \frac{2m+1}{2i}a}\right)$$

oder

$$(61.) \qquad \frac{\vartheta(v)}{\vartheta(0)} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2 vi}{\cos^2 \frac{2m+1}{2i}a}\right),$$

$$(61^a.) \qquad \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2 . \frac{2\pi x}{\omega}}{\cos^2 \frac{2m+1}{\omega}\pi\omega'}\right),$$

wenn noch bewiesen wird, dass das Integral

$$\int \frac{\partial \lg \vartheta(i \arc\sin \xi)}{(\xi - x)\partial \xi} d\xi$$

über die ganze Begrenzung s von S erstreckt, Null ist.

Setzen wir in (61.) $a + \pi i$ für a, so ist nach dem pag. 88 Bemerkten

$$\vartheta(v,\ a + i\pi) = \vartheta(v + \tfrac{1}{2}i\pi,\ a) = \vartheta_{0,1}(v),$$

und folglich

$$(62.) \qquad \frac{\vartheta_{0\,1}(v)}{\vartheta_{0\,1}} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2 vi}{\sin^2 \frac{2m+1}{2i}a}\right)$$

$$(62^a.) \qquad \frac{\Theta_{0\,1}(x)}{\Theta_{0\,1}} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi x}{\omega}}{\sin^2 \frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}}\right).$$

Das Stück S wählen wir nun so, dass seine Begrenzung s vom Puncte $x = 0$ überall sehr weit entfernt ist, und niemals durch einen Punct geht, in welchem die ϑ-Function Null wird. Jeden (noch so grossen) Werth von v kann man in die Form

setzen $v = u + ha + gi\pi$, worin h, g ganze Zahlen und u eine Zahl ist, die einem Puncte eines Parallelogrammes mit den Ecken 0, $i\pi$, $a + i\pi$, a entspricht. Setzt man die Zahlen, welche dem Bilde der Curve s in der v-Ebene entsprechen, in diese Form, so kann

$$\frac{\partial \lg \vartheta(v)}{\partial v} = -2h + \frac{\partial \lg \vartheta(u)}{\partial u}$$

nur unendlich gross werden, wenn h unendlich gross wird, und bleibt daher, mit $v = i \arcsin x$ dividirt, immer endlich, d. h. seinem absoluten Betrage nach unter einer festen Zahl, etwa M.

Schreiben wir nun

$$\int\limits_s \frac{\partial \lg \vartheta(i \arcsin \xi)}{(\xi - x)\,d\xi} = \int\limits_s \frac{\partial \lg \vartheta(v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - x} =$$

$$\int\limits_s \frac{\partial \lg \vartheta(v)}{v . \partial v} \cdot \frac{\arcsin \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{d\xi}{\xi - x},$$

und beachten, dass $\arcsin \xi$ für zunehmende ξ langsamer unendlich wird, als jede Potenz von ξ mit noch so kleinen positiven Exponenten, so finden wir, dass der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck für zunehmende ξ unendlich klein in einer um ein Angebbares höheren als der ersten Ordnung wird, nämlich immer noch in einer höheren als $\xi^{-\frac{3}{2}}$, und folglich (I[b]. pag. 10) convergirt das Integral $\int\limits_s \frac{d \lg \vartheta(i \arcsin \xi)}{(\xi - x)\,d\xi} . d\xi$ gegen Null, wenn wir s überall weiter und weiter vom Puncte $\xi = 0$ entfernt annehmen; was gefordert wurde.

Um $\vartheta_{1\,0}(v)$ in ein unendliches Product zu verwandeln, untersuchen wir die Function $\varphi(v) = \frac{\vartheta_{1\,0}(v)}{\cos(vi)}$, welche für endliche v nicht unendlich wird, für $v = ma \pm \frac{1}{2} i\pi + 2ni\pi$ verschwindet, wenn m nicht Null ist, und die Periode $i\pi$ besitzt. Ferner ist $\varphi(i \arcsin x)$ eine einwerthige Function von x, welche für endliche x endlich bleibt, und welche die Anwendung des Satzes XXIV. gestattet, wenn das Stück S wie vorhin gewählt wird. Daraus folgt $\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} =$

$$(63.) \qquad \frac{\vartheta_{1\,0}(v)}{\cos(vi)\,\vartheta_{1\,0}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \left(1 - \frac{\sin^2(vi)}{\cos^2 mai}\right)$$

oder

$$(63^a.)\quad \frac{\Theta_{10}(x)}{\Theta_{10}} = \cos\frac{2\pi x}{\omega}\cdot\prod_{1\,(m)}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}}{\cos^2\frac{2m\pi\omega'}{\omega}}\right).$$

Endlich ist $\varphi(v) = \frac{\vartheta_{11}(v)}{\sin iv}$ eine Function, die für $v = ma + ni\pi$ verschwindet, wenn m nicht 0 ist, und auf welche, wenn $v = i\arcsin x$ gesetzt wird, der Satz XXIV. angewendet werden kann. Daraus folgt

$$(64.)\quad \frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = \frac{\vartheta_{11}(v)}{\sin vi}\cdot\frac{i}{\vartheta'_{11}(0)} = -\frac{\vartheta_{11}(v)}{\sin vi}\cdot\frac{2\pi}{\omega\sqrt{k}\,\vartheta_{01}}$$

$$= \prod_{1\,(m)}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2 vi}{\sin^2 mai}\right)$$

oder

$$(64^a.)\quad \frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{01}} = \frac{\omega\sqrt{k}}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{\omega}\cdot\prod_{1\,(m)}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}}{\sin^2\frac{2m\pi\omega'}{\omega}}\right).$$

Ersetzt man $\sin\mu ai$ durch $\frac{q^{-\mu a}-q^{+\mu a}}{2i}$, $\cos\mu ai$ durch $\frac{q^{\mu a}+q^{-\mu a}}{2}$, so lassen sich die Produkte leicht in die Formen bringen, welche von Jacobi herrühren:

$$(61^b.)\quad \frac{\Theta(x)}{\Theta} = \prod_{0\,(n)}^{\infty}\frac{1+2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})^2},$$

$$(62^b.)\quad \frac{\Theta_{01}(x)}{\Theta_{01}} = \prod_{0\,(n)}^{\infty}\frac{1-2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

$$(63^b.)\quad \frac{\Theta_{10}(x)}{\Theta_{10}} = \cos\frac{2\pi x}{\omega}\prod_{1\,(n)}^{\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2},$$

$$(64^b.)\quad \frac{\Theta_{11}(x)}{\Theta_{01}} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{k}\sin\frac{2\pi x}{\omega}\prod_{1\,(n)}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Art. 7. Darstellung der Constanten ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ'_{11} durch unendliche Produkte.

Die aufgestellten Formeln liefern die Darstellungen der ϑ-Functionen durch unendliche Produkte nicht vollständig, indem diese Produkte fürs erste noch mit den Constanten ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ'_{11} zu multipliciren sind, welche bis jetzt nur durch Reihen dargestellt sind. Mittels der Gleichung (3), welche für Constantenbestimmungen überhaupt von Wichtigkeit ist, gelingt es leicht auch diese Constanten durch Produkte darzustellen, ohne dass man dazu, wie Jacobi (Fundamenta nova pag. 178) besonderer Kunstgriffe nöthig hätte.

Wir wenden die Differentialgleichung (3.) $\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} = \frac{4\partial\,\vartheta(v)}{\partial a}$ auf die rechte Seite der Gleichung

$$\vartheta(v) = \vartheta . \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2 vi}{\cos^2 \frac{2m+1}{2i}a}\right)$$

an und setzen nach der Differentiation $v = 0$, für welchen Werth $\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v}$ mit ϑ'' bezeichnet wird. So ist zunächst

$$\vartheta'(v) = \vartheta(v)\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{-2i\sin vi\cos vi}{\cos^2\frac{2m+1}{2i}a - \sin^2 vi}.\cos^2\frac{2m+1}{2i}a,$$

also weiter

$$\vartheta'' = \vartheta . \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{2}{\cos^2\frac{2m+1}{2i}a} = 2\vartheta\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{\partial\frac{e^{(2m+1)a}}{1+e^{(2m+1)a}}}{\partial a}.\frac{4}{2m+1}\right)$$

$$= 4\frac{\partial\vartheta}{\partial a},$$

oder wenn man mit 4ϑ dividirt

$$d\lg\vartheta = 2d\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{e^{(2m+1)a}}{1+e^{(2m+1)a}}.\frac{1}{2m+1},$$

$$\lg\vartheta = A + 2\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{e^{(2m+1)a}}{1+e^{(2m+1)a}}.\frac{1}{2m+1},$$

worin A von a unabhängig ist. Für $a = -\infty$ ist $\vartheta = 1$, die Summe der rechten Seite 0, und folglich $A = 0$.

Schreiben wir nun

$$2\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{e^{(2m+1)a}}{2m+1}.\frac{1}{1+e^{(2m+1)a}} = 2\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{e^{(2m+1)a}}{2m+1}(-1)^n e^{(2m+1)na}$$

und indem wir die Reihenfolge der Summationen vertauschen, hierfür

$$2\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^n \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(e_{(n+1)a})^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} (-1)^{n+1} \lg \frac{1-e^{(n+1)a}}{1+e^{(n+1)a}},$$

so erhalten wir, indem wir noch $n+1$ durch n ersetzen, also eine um Eins verschobene Zählung einführen:

$$\lg \vartheta = \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^n \lg \frac{1+e^{an}}{1+e^{an}} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(\lg\frac{1-e^{2am}}{1+e^{2am}} + \lg\frac{1+e^{(2m+1)a}}{1-e^{(2m+1)a}}\right)$$

$$(65.)\quad \vartheta = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-e^{2am}}{1+e^{2am}} \cdot \frac{1+e^{(2m-1)a}}{1-e^{(2m-1)a}}$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}} \cdot \frac{1+q^{(2m-1)}}{1-q^{(2m-1)}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1+q^{2m-1})^2 (1-q^{2m})$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}},$$

und wenn wir $a+i\pi$ für a setzen

$$(66.)\quad \vartheta_{0\,1} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-e^{ma}}{1+e^{ma}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1-q^m}{1+q^m}$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1-q^{2m-1})^2 (1-q^{2m}) = \sqrt{\frac{k'\omega}{2\pi}}.$$

Ein ganz gleiches Verfahren lässt sich auf die Function $\vartheta_{1\,0}(v)$ anwenden, welches die Gleichungen liefert

$$(67.)\quad \vartheta_{1\,0} = 2\sqrt[4]{q} \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-q^{4(m+1)}}{1-q^{2(2m+1)}} = \sqrt{\frac{\omega k}{2\pi}}$$

und muss nur in geringer Weise modificirt werden, damit es auch auf

$$\vartheta_{1\,1}(v) = \vartheta'_{1\,1} \cdot \frac{\sin vi}{i} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \left(1 - \frac{\sin^2 vi}{\sin^2 mai}\right)$$

anwendbar sei. Wollte man nämlich die rechte Seite in die Gleichung (3.) einsetzen, und dann $v=0$ setzen, so würde man $0=0$ erhalten.*) Man muss deshalb, ehe man $v=0$

---

*) Der Irrthum, welcher sich bei Jacobi (Fundamenta nova pag. 185 Gleichung 5) eingeschlichen hat, ist auch in Briot und Bouquet übergegangen No. 152 Gleichung 15.

setzt, mit $\sin vi$ dividiren und nachher $v = 0$ setzen. Das weitere Verfahren ist ganz das frühere und liefert

$$(68.)\quad i\vartheta'_{11} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2m})^3 = \sqrt{kk'\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^3},$$

so dass nun alle Constanten durch Produkte dargestellt sind.

Bilden wir das Produkt

$$\vartheta.\vartheta_{01}.\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(1-q^{2(2m-1)})^2.(1-q^{2m})^2.(1-q^{4m})}{1-q^{2(2m-1)}}$$

$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2(2n-1)}).(1-q^{4m}).(1-q^{2m})^2$$

$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2m})^3,$$

woraus nach (68.) fliesst

$$\vartheta.\vartheta_{01}.\vartheta_{10} = i\vartheta'_{11},$$

welche Gleichung wir schon pag. 102 Gl. 54 aufgestellt haben. Die dort angewendete Methode hat den Vorzug der Verallgemeinerung für hyperelliptische Functionen fähig*) zu sein, die hier gegebene den Vorzug, dass sie nur Mittel erfordert, welche die fundamentalen Eigenschaften der ϑ-Functionen selbst bieten, während dort die elliptischen Integrale zu Hilfe genommen wurden.

Art. 8. Darstellung der Θ-Functionen durch zweifach unendliche Produkte.

Die Gleichung (61ª.) kann in eine andre Form gebracht werden, indem man schreibt

$$(69.)\quad \frac{\Theta(x)}{\Theta} = \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}}\right)$$

$$= \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{\cos^2\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}-\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}} =$$

*) Crelle's Journal Band 71 pag. 201 et seqq. Gleich. (14).

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{\cos\left(\frac{2\pi x}{\omega}+\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}\right).\cos\left(\frac{2\pi x}{\omega}-\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}\right)}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \frac{\cos\left(\frac{2\pi x}{\omega}-\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}\right)}{\cos\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}}.$$

Man darf hierin nicht sofort das Produkt über alle m von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen, sondern muss den Ausdruck als den Grenzwerth der hier aufgestellten $2n$ Factoren machen, weil das Produkt nicht unbedingt convergent ist, d h. eine willkürliche Anordnung der Factoren nicht zulässt. Es verhält sich hiermit ähnlich wie mit dem einfacheren Produkte, welches man erhält, wenn man $\cos\frac{2\pi(x-h)}{\omega}$ in ein unendliches Produkt entwickeln will. Da nämlich diese Function für alle $x = h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega$ in der ersten Ordnung unendlich klein wird, so ist nach Satz XXIV.

$$(70^a) \quad \frac{\cos\frac{2\pi(x-h)}{\omega}}{\cos\frac{2\pi h}{\omega}} = \prod\left(1-\frac{x}{h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega}\right),$$

wenn für m alle möglichen ganzen Zahlen eingesetzt werden, für welche die $x = \frac{1}{4}(2m+1)\omega$ in das Innere eines Stückes „S" fallen, welches die Eigenschaft besitzt, dass das über die ganze Begrenzung s von S genommene Integral

$$(A) \quad \int_s \operatorname{tg}\frac{2\pi(\xi-h)}{\omega}\cdot\frac{d\xi}{\xi-x} =$$

$$\int_s \operatorname{tg}\frac{2\pi(\xi-h)}{\omega}\cdot\frac{d\xi}{\xi-h} + (x-h)\int_s \frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi(\xi-h)}{\omega}}{\xi-x}\cdot\frac{d\xi}{\xi-h}$$

verschwindet. Ziehen wir nun um den Punct $\xi = h$ einen sehr grossen Kreis, dessen Peripherie s keinen der Puncte $\xi = h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega$ trifft, so bleibt auf der ganzen Peripherie des Kreises s die Function $\operatorname{tg}\frac{2\pi(\xi-h)}{\omega}$ endlich und nimmt für

die Endpuncte eines Durchmessers durch das Vorzeichen verschiedene Werthe an, weil dort $\xi - h$ entgegengesetzte Werthe besitzt, und die Tangente eine ungerade (mit dem Argument das Zeichen wechselnde) Function ist. Da nun auf der ganzen Peripherie das Element $\frac{d\xi}{\xi - h}$ einen und denselben Werth, nämlich $id\varphi$ hat, wenn $\xi - h = Re^{\varphi i}$ gesetzt wird, so heben sich die Elemente des Integrals

$$\int_s \operatorname{tg} \frac{2\pi(\xi - h)}{\omega} \cdot \frac{d\xi}{\xi - h},$$

welche zu Endpuncten eines Durchmessers gehören, Glied für Glied auf, und das Integral ist genau Null. In dem Integral

$$\int_s \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi(\xi - h)}{\omega}}{\xi - x} \cdot \frac{d\xi}{\xi - h}$$

werden die Elemente sämmtlich unendlich klein zweiter Ordnung und es convergirt daher (nach Ib. pag. 10) gegen Null, wenn R grösser und grösser genommen wird. Dasselbe gilt daher von dem kritischen Integrale (A)

$$\int_s \operatorname{tg} \frac{2\pi(\xi - h)}{\omega} \cdot \frac{d\xi}{\xi - h}.$$

Es muss demnach das Produkt (70a.) über alle ganzen Zahlen erstreckt werden, für welche die Werthe $x = h + \frac{1}{4}(2m + 1)\omega$ im Innern eines sehr grossen um den Punct h geschlagenen Kreises liegen. Dies sind nicht schlechthin unendlich viele negative Zahlen m und unendlich viele positive, sondern die Anzahl der negativen und positiven (da natürlich h eine endliche Zahl ist) werden sich nur um ein Endliches unterscheiden, und zwar werden die Zahlen m, welche nicht sowohl als positive als auch als negative im Produkte zu nehmen sind, sehr gross sein. Da es nun auf eine endliche Anzahl unendlich ferner Factoren offenbar*) nicht ankommt, weil diese gegen 1 convergiren, so kann man

---

*) In dem letzten Produkte der Gleichungen (69.) ist auch dies nicht einmal der Fall, weil die Factoren mit zunehmendem m nicht gegen 1 convergiren.

$$(70.)\quad \frac{\cos\frac{2\pi(x-h)}{\omega}}{\cos\frac{2\pi h}{\omega}} = \lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \left(1 - \frac{x}{h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega}\right)$$

setzen, während z. B.

(71.)

$$\lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{p.n}{}_{(m)} \left(1 - \frac{x}{h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega}\right) \text{ gegen } e^{-\frac{2x\lg p}{\omega}} \cdot \frac{\cos\frac{2\pi(x-h)}{\omega}}{\cos\frac{2\pi h}{\omega}}$$

convergirt. Denn wir können diesen Grenzwerth in die Form

$$\lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \left(1 - \frac{x}{h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega}\right) \cdot \lim_{n=\infty} \prod_{n+1}^{pn}{}_{(m)} 1 - \frac{x}{h+\frac{1}{4}(2m+1)\omega}$$

$$= \frac{\cos\frac{2\pi(x-h)}{\omega}}{\cos\frac{2\pi h}{\omega}} \cdot \lim_{n=\infty} \prod_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)} \left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}n\omega + \frac{1}{2}m\omega + \frac{1}{4}\omega + h}\right)$$

bringen. Nun ist aber

$$\lim_{n=\infty} \prod_{1}^{(p-1)n} \left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}n\omega + \frac{1}{2}m\omega + \frac{1}{4}\omega + h}\right)$$

$$= \lim_{n=\infty} . e^{\sum_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)} \lg\left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}n\omega + \frac{1}{2}m\omega + \frac{1}{4}\omega + h}\right)}$$

$$= \lim_{n=\infty} . e^{-\sum_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)} \frac{x}{\frac{1}{2}n\omega + \frac{1}{2}m\omega + \frac{1}{4}\omega + h}}$$

$$= \lim_{n=\infty} . e^{-\frac{2x}{\omega}\sum_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)} \frac{x}{1+\frac{m}{n}+\frac{\omega+4h}{2n}}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= e^{-\frac{2x}{\omega}\int_1^p \frac{dx}{x}} = e^{-\frac{2x\lg p}{\omega}},$$

womit (71.) bewiesen ist.

Setzen wir nun den Ausdruck, welchen (70.) liefert, wenn $\frac{1}{2}(2m'+1)\omega'$ für h gesetzt wird, in die Gleichung (69.) ein, so erhalten wir

$$(72.)\quad \frac{\Theta(x)}{\Theta} = \lim_{n,\,n'=\infty} \prod_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} 1 - \frac{x}{\frac{1}{4}(2m+1)\omega + \frac{1}{2}(2m'+1)\omega'}$$

ein zweifach unendliches Produkt, welches keineswegs unbedingt convergent ist, d. h. eine beliebige Anordnung der Glieder nicht zulässt. *Soll nun ein zweifach unendliches Produkt* $\Pi_m \Pi_{m'} A_{m,m'}$ *unbedingt convergent sein, so muss* $m^{1+\sigma} . m'^{1+\tau} . lg\, A_{m,m'}$ *mit wachsenden in beliebigem Verhältnisse stehenden m und m' gegen Null convergiren, wenn σ und τ positive Zahlen sind.* Im andern Falle kann nur bedingungsweise Convergenz stattfinden.

Man besitzt aber ein von Eisenstein herrührendes Mittel, ein nur bedingungsweise convergentes Produkt in ein unbedingt convergentes zu verwandeln, welches für dieselben Stellen als das vorgegebene verschwindet. Man kann nämlich den einzelnen Factoren derselben noch einen Factor beigeben, der für endliche Werthe der Variabeln nicht verschwindet und nicht unendlich wird, und die Form $e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots + \nu x^n}$ besitzt, worin α, β, γ, ... ν passend zu bestimmen sind. Im vorliegenden Falle multipliciren wir das allgemeine Glied des Produktes (72.) mit

$$e^{\frac{x}{\frac{1}{4}(2m+1)\omega + \frac{1}{2}(2m'+1)\omega'} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{[\frac{1}{4}(2m+1)\omega + \frac{1}{2}(2m'+1)\omega']^2}\right)},$$

dann ist der Logarithmus des allgemeinen Gliedes, wenn

$$u_{m,m'} = \tfrac{1}{4}(2m+1)\omega + \tfrac{1}{2}(2m'+1)\omega'$$

zur Abkürzung gesetzt wird,

$$\lg\left[\left(1 - \frac{x}{u_{m,m'}}\right) e^{\frac{x}{u_{m,m'}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{u^2_{m,m'}}\right)}\right] = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^3(1+\varepsilon)}{u^3_{m,m'}}\right),$$

worin ε eine ihrem absoluten Betrage nach sehr kleine Zahl bedeutet, wenn $\frac{x}{u_{m,m'}}$ dem absoluten Betrage nach unter 1 liegt. Man sieht nun leicht ein, dass $m^{1+\sigma} . m'^{1+\tau} . \frac{x^3(1+\varepsilon)}{u^3_{m,m'}}$ — so lange die positiven Grössen σ, τ unter der Einheit liegen, und ω und ω' in einem complexen Verhältnisse zu einander stehen — mit zunehmenden, in beliebigem Verhältnisse stehenden m, m' gegen Null convergirt, so dass das Produkt

$$(73.)\quad \prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m')} \left[\left(1 - \frac{x}{u_{m,m'}}\right) e^{\frac{x}{u_{m,m'}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{u^2_{m,m'}}\right)}\right] = U(x)$$

ein unbedingt convergentes ist. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von der Function $\frac{\Theta(x)}{\Theta}$ durch den Factor

$$f = \lim_{n,\, n' = \infty} e^{-\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')}\sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)}\left[\frac{x}{u_{m,m'}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{u^2_{m,m'}}\right)\right]}.$$

In der Summe $\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')}\sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)}\frac{x}{u_{m,m'}}$ hebt sich das Glied $\frac{x}{u_{m,m'}}$ gegen das Glied $\frac{x}{u_{-m-1,\,-m'-1}}$ fort, und sie hat daher den Werth Null, so dass der Factor f von der Form $e^{-\frac{1}{2}x^2 M}$ ist, und M den Werth $\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')}\sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)}\frac{1}{u^2_{m,m'}}$ hat. Um die Constante M zu bestimmen, entwickeln wir $\lg U(x)$ nach Potenzen von x, so beginnt die Entwicklung mit der dritten oder einer höheren Potenz *) von x, weil wir ja in (73.) die einzelnen Factoren so eingerichtet haben, dass in ihrer Entwicklung die erste und die zweite Potenz fortfallen. Nun ist aber

$$\lg \Theta(x) - \lg \Theta = \lg[U(x) . e^{-\frac{1}{2}x^2 M}] = -\tfrac{1}{2}x^2 M + \lg U(x)$$

und da nach (51a.) pag. 101 für $x = 0$ die Gleichung stattfindet

$$\frac{\partial^2 \lg \Theta(x)}{\partial x^2} = c' = \frac{kk'^2}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\Theta''}{\Theta},$$

so ergiebt sich $-M = \frac{kk'^2}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial k}$, und endlich

(74.)

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} . e^{\frac{x^2 kk'^2}{2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dk}} \prod_{(m,m')}^{(2)}{}_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{u_{m,m'}}\right) e^{\frac{x}{u_{m,m'}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{u^2_{m,m'}}\right)}$$

$$u_{m,m'} = \tfrac{1}{4}(2m+1)\,\omega + \tfrac{1}{2}(2m'+1)\,\omega',$$

womit nun $\Theta(x)$ als unbedingt convergentes zweifach unendliches Produkt dargestellt ist.

An die Function

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta} . e^{-\frac{x^2 kk'^2}{2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dk}} = e^{-\int_0^x Z(x)\,d(x)}$$

---

*) Da die Function gerade ist, so beginnt die Entwicklung mit der vierten Potenz von x.

knüpft Herr **Weierstrass** seine Untersuchungen über elliptische Functionen, welche er auch auf die Abel'schen Transcendenten ausgedehnt hat. Da diese Function in der ganzen x-Ebene den Charakter „$f(x)$" hat, so muss sie sich nach XIV. pag. 24 in eine unendliche, in der ganzen x-Ebene convergente Reihe entwickeln lassen. Es kommt aber, wie Herr **Weierstrass** zeigt, den Coefficienten die bemerkenswerthe Eigenschaft zu, dass sie **ganze Functionen** von k^2 sind. Wir begnügen uns auf diese Eigenschaften aufmerksam gemacht zu haben, weil die Entwicklung complicirt, und die Coefficienten wenig übersichtlich sind.

Hieran fügen wir noch die Gleichungen

(75.)
$$\Theta_{0\,1}(x) = \sqrt{\frac{\omega k'}{2\pi}} \lim_{m',\,n'=\infty} \prod_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \prod_{-m'}^{m'}{}_{(m)} 1 - \frac{x}{\frac{1}{2}m\omega + \frac{1}{2}(2n+1)\omega'};$$

(76.)
$$\Theta_{1\,0}(x) = \sqrt{\frac{\omega k}{2\pi}} \,.\, \lim_{m',\,n'=\infty} \prod_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \prod_{-m'-1}^{m'}{}_{(m)} 1 - \frac{x}{\frac{1}{4}(2m+1)\omega + n\omega'};$$

$$(77.)\quad \Theta_{1\,1}(x) = \sqrt{\frac{k k'\omega}{2\pi}} \,.\, \lim_{m',\,n'=\infty} x \,.\, \prod_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \prod_{-m'}^{m'}{}_{(m)} 1 - \frac{x}{\frac{1}{2}m\omega + n\omega'}.$$

In (77.) ist die Combination $m = 0$, $n = 0$ nicht als einen Factor bildend zuzulassen. Diese Produkte kann man mit denselben Mitteln als das Produkt (72.) in unbedingt convergente verwandeln. So aber, wie sie hier vorgegeben sind, lassen sie weder eine Aenderung des Verhältnisses der Anzahl der in negativer Richtung genommenen Glieder zu der Anzahl der in positiver Richtung genommenen zu, noch eine Vertauschung der beiden aufeinander folgenden Produktbildungen. Denn während z. B. die Factoren des Produktes (72.) symmetrisch in Bezug auf $\frac{1}{2}\omega$ und ω' sind, ist dies mit dem ausgeführten Produkt keineswegs der Fall. Die Beziehung aber, welche zwischen zwei Θ-Functionen besteht, in denen $\frac{1}{2}\omega$ und ω' vertauscht werden und zu welchen man durch Vertauschung der Produkte offenbar gelangt, finden sich in dem Artikel von der linearen Transformation.

Bei Bestimmung der Grösse M fanden wir $\Theta'' =$

$\Theta . \frac{k k'^2}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial k}$; man findet in ähnlicher Weise Θ''_{01}, Θ''_{10}, und zwar ist

$$(78.)\quad \Theta'' = \frac{k k'^2}{\sqrt{2\omega\pi}} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \Theta''_{01} = \frac{k . k'^2}{\sqrt{2\pi\omega k'}} \frac{d(\omega k')}{dk},$$

$$\Theta''_{10} = \frac{d(\omega k)}{dk} \frac{k . k'^2}{\sqrt{2\pi\omega k}}.$$

Art. 9. Partialbrüche.

Führt man für v die Variabele x durch die Gleichung $v = i \arcsin x$ in $\frac{1}{\vartheta_{11}(v)}$ ein, so lässt sich mit Hilfe des Satzes XXIII. pag. 54 die Function $\frac{1}{\vartheta(i \arcsin x)}$ in eine Partialbruchreihe verwandeln, welche unbedingt convergent ist, und dann durch Auflösung der Function $\frac{1}{\cos(x-\beta)}$ in Partialbrüche in eine zweifach unendliche Partialbruchreihe, welche nur mit vorgegebener Anordnung der Glieder gegen einen festen Werth convergirt. Wir wollen indessen hier den umgekehrten Weg einschlagen, und zuerst die zweifach unendliche Partialbruchreihe herleiten, weil wir so nebenbei zu den Partialbruchentwickelungen für $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$ gelangen.

Die Function $\frac{1}{\vartheta_{11}(v)}$ wird für $v = ma + ni\pi = v_{m,n}$ unendlich gross in der ersten Ordnung, und es ist

$$\lim_{v = v_{m,n}} \frac{v - v_{m,n}}{\vartheta_{11}(v)} = \lim_{v'=0} \frac{v'}{\vartheta_{11}(v' + ni\pi + ma)}$$

$$= \lim_{v'=0} \frac{(-1)^{m+n} . v'}{e^{-am^2 - 2mv'} . \vartheta_{11}(v')} = \frac{(-1)^{m+n} . q^{m^2}}{\vartheta'_{11}},$$

und mithin nach XXIII.

$$\frac{1}{\vartheta_{11}(v)} = \frac{1}{\vartheta'_{11}(0)} . \sum_{(m,n)} \frac{(-1)^{m+n} . q^{m^2}}{v - am - ni\pi},$$

wenn die Summation über alle ganzen Zahlen m und n ausgedehnt wird, für welche $v_{m,n}$ im Innern eines Stückes „S“ (in der v-Ebene) liegt, welches die Eigenschaft besitzt, dass das über die ganze Begrenzung s von S genommene Integral

$$\int\limits_s \frac{du}{(u-v)\vartheta_{11}(u)} = \int\limits_s \frac{du}{u\vartheta_{11}(u)} + v\int\limits_s \frac{du}{u(u-v)\vartheta_{11}(u)}$$

verschwindet. Das Integral $\int\limits_s \frac{du}{u(u-v)\vartheta_{11}(u)}$ convergirt nun immer gegen Null, wenn die Begrenzung s durch keinen Punct geht, für welchen $\vartheta_{11}(v)$ verschwindet, und überall weiter und weiter von dem Puncte $v = 0$ entfernt wird, weil dann die zu integrirende Function mit zunehmendem u überall mindestens unendlich klein zweiter Ordnung wird. Nehmen wir nun für S eine Figur, die zwischen den Puncten der v-Ebene $\frac{1}{2}(2m'+1)a + \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ und $\frac{1}{2}(2m'+1)a - \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ durch eine beliebige, keinen Punct $v_{m,n}$ treffende Curve, zwischen $\frac{1}{2}(2m'+1)a - \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ und $-\frac{1}{2}(2m'+1)a - \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ durch eine Gerade, zwischen $-\frac{1}{2}(2m'+1)a - \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ und $-\frac{1}{2}(2m'+1)a + \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ durch eine beliebige, keinen Punct $v_{m,n}$ treffende Curve, zwischen $-\frac{1}{2}(2m'+1)a + \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ und $\frac{1}{2}(2m'+1)a + \frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ durch eine Gerade begrenzt wird, so sind die für das Verschwinden des letzten Integrales nöthigen Bedingungen erfüllt, wenn m', n' über alle Grenzen wachsen. Aber das Integral $\int\limits_s \frac{du}{u\,.\,\vartheta_{11}(u)}$ zerfällt in die beiden geradlinigen, und in die beiden über die beliebig gelassenen Curven. Auf den letzteren wächst der reelle Theil von u mit wachsendem m' über alle Grenzen, und es wird daher auf ihnen $\frac{1}{\vartheta_{11}(u)}$ [wegen der Functionalgleichung (2.)] unendlich klein in unbegrenzt hoher Ordnung. Die von diesen Curven herrührenden Bestandtheile convergiren deshalb gegen Null. Auf den beiden geradlinigen Strecken giebt es zu jedem Puncte u auf der einen, einen Punct $-u$ auf der andern, und die beiden zu ihnen gehörenden Integrationselemente

$$\frac{du}{u\vartheta_{11}(u)} \text{ und } \frac{d(-u)}{(-u)\,.\,\vartheta_{11}(-u)} = -\frac{du}{u\vartheta_{11}(v)}$$

sind einander entgegengesetzt gleich, deshalb heben sich die von den beiden geradlinigen Strecken herrührenden Bestandtheile des Integrales $\int\limits_s \frac{du}{u\vartheta_{11}(u)}$ gegenseitig auf. Demnach convergirt auch das Integral

$$\int\limits_s \frac{du}{(u-v)\,\vartheta_{11}(u)}$$

mit wachsenden m', n' gegen Null, und es ist folglich

$$(79.)\quad \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{11}(v)} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^{m+n}.\,q^{m^2}}{v-am-ni\pi},$$

woraus für $a=-\infty$, also $q=0$ sich ergiebt

$$(80^a.)\quad \frac{2}{e^v-e^{-v}} = \frac{1}{i\sin(-vi)} = \lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{v-ni\pi}$$

oder wenn man v durch it ersetzt,

$$(80.)\quad \frac{1}{\sin t} = \lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{t-n\pi} = \frac{1}{t} + 2t \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{t^2-n^2\pi^2}$$

und wenn man t durch $t-\frac{1}{2}\pi$ ersetzt, (81.)

$$\frac{1}{\cos t} = -\lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{t-\frac{1}{2}(2n+1)\pi} = \pi \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n(2n+1)}{\frac{1}{4}(2n+1)^2\pi^2-t^2}.$$

Wenden wir nun die Gleichung (80^a.) auf die Gleichung (79.) an, so folgt,

$$(82^a.)\quad \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{11}(v)} = \sum_{\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{i\sin(am-v)i},$$

$$(82.)\quad \frac{1}{\Theta_{11}(x)} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{\omega^3kk'}} \sum_{\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin\left(\frac{2\pi x}{\omega}-\frac{2m\pi\omega'}{\omega}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{(2\pi^3)}{\omega^3kk'}}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi x}{\omega}} + 4\sin\frac{2\pi x}{\omega} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m.\,q^{m^2}\cos\frac{2m\pi\omega'}{\omega}}{\cos\frac{4m\pi\omega'}{\omega}-\cos\frac{4\pi x}{\omega}}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{\omega^3kk'}}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi x}{\omega}} + 4\sin\frac{2\pi x}{\omega} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2+m}(1+q^{2m})}{1-2q^{2m}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{4m}}\right),$$

welche Reihen unbedingt convergent sind. Ersetzt man v durch $v+\frac{1}{2}i\pi$ oder x durch $x+\frac{1}{4}\omega$ in ihnen, so folgt

$$(83^a.)\quad \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{10}(v)} = \sum_{\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{i\cos(mai-vi)},$$

$$(83.)\quad \frac{1}{\Theta_{10}(x)} \cdot \sqrt{\frac{\omega^3kk'}{(2\pi)^3}} = \sum_{\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\cos\left(\frac{2\pi x}{\omega}-\frac{2\pi m\omega'}{\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{2\pi x}{\omega}} + 4\cos\frac{2\pi x}{\omega} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m(m+1)}.\,(1+q^{2m})}{1+2q^{2m}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{4m}}.$$

Um die Function $\frac{1}{\vartheta(v)}$ durch eine Partialbruchreihe darzustellen, ist es jedoch bequemer, durch die Gleichung $v = i \arcsin x$ die Variabele x einzuführen. Da nämlich mit zunehmendem x stets der imaginäre Theil von $\arcsin x$, also der reelle Theil von $i \arcsin x$ unendlich gross wird, so convergirt das Integral

$$\int \frac{d\xi}{\vartheta(i \arcsin \xi)} \text{ gegen } 0,$$

wenn es in der ξ-Ebene über eine von der Stelle $\xi = 0$ überall sehr weit entfernte Curve genommen wird, welche keinen Punct trifft, für welchen $\vartheta(i \arcsin \xi)$ verschwindet, weil die zu integrirende Function [wegen der Functionalgleichung (2.)] für wachsende ξ unendlich klein in unbegrenzt hoher Ordnung wird. Da nun $\vartheta(i \arcsin x)$ für $x = \sin\left(\frac{2m+1}{2i} a \pm \frac{\pi}{2}\right) = x_m$ verschwindet, und wenn m alle Zahlen von 0 bis ∞ durchläuft, nur für diese Werthe verschwindet, da ferner

$$\lim_{x=x_m} \frac{x - x_m}{\vartheta(i \arcsin x)} = \lim_{x'=0} \frac{x'}{\vartheta(i \arcsin [x' + x_m])} =$$

$$\frac{\sqrt{1-x_m^2}}{i\vartheta'(i \arcsin x_m)} = \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2i} a \pm \frac{\pi}{2}\right)}{i\vartheta'(\frac{1}{2}[2m+1]a \pm \frac{1}{2} i\pi)} =$$

$$\mp \frac{q^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m . 2i . \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{1\,1}}$$

ist, so folgt aus XXIII,

$$\frac{1}{\vartheta(i \arcsin x)} =$$

$$\sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{q^{m^2}.(1-q^{2m+1})}{(-1)^m . 2i . \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{1\,1}} \left(\frac{1}{x + \cos\frac{2m+1}{2i} a} - \frac{1}{x - \cos\frac{2m+1}{2i} a} \right)$$

und also

$$(84.) \quad \frac{1}{\vartheta(v)} = \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{iq^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m . \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{1\,1}} \frac{\cos\frac{2m+1}{2i} a}{\sin^2 vi - \cos^2\frac{2m+1}{2i} a},$$

(85.)

$$\frac{1}{\Theta(x)} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{\omega^3 k k'}} \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{q^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m \sqrt[4]{q}} . \frac{2\cos\frac{(2m+1)\pi\omega'}{\omega}}{\cos\frac{2(2m+1)\pi\omega'}{\omega} + \cos\frac{4\pi x}{\omega}};$$

(86.)

$$\sqrt{\frac{\omega^3 k k'}{(2\pi)^3}} \cdot \frac{1}{\Theta(x)} = \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{2 q^{m^2}(1-q^{2(2m+1)})\, q^{\frac{2m+1}{2}}}{(-1)^m \sqrt[4]{q}\,(1+2q^{2m+1}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2m+1)})}.$$

Setzen wir hierin $v+\frac{1}{2}i\pi$ für v und $x+\frac{1}{4}\omega$ für x, so erhalten wir

$$(87^a.)\quad \frac{1}{\vartheta_{01}(v)} = \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{i\, q^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m \sqrt[4]{q}\,.\,\vartheta'_{11}} \cdot \frac{\cos\frac{2m+1}{2i}a}{\cos^2 vi - \cos^2\frac{2m+1}{2i}a};$$

(87.)

$$\sqrt{\frac{\omega^3 k k'}{(2\pi)^3}}\, \frac{1}{\Theta_{01}(x)} = \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{(-1)^m . 2\sqrt[4]{q}\,.\,q^{m^2+m}\,.\,(1-q^{2(2m+1)})}{1-2q^{2m+1}.\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2m+1)}}.$$

Um die Functionen $\frac{d\lg\vartheta(v)}{dv}$, $\frac{d\lg\Theta(x)}{dx}$ durch Partialbrüche darzustellen, braucht man nur die Produkte für $\vartheta(v)$, $\Theta(x)$ logarithmisch zu differenziren, so erhält man diese Darstellungen. Wir beschränken uns auf die Functionen $\Theta(x)$, $\Theta_{01}(x)$, $\Theta_{10}(x)$, $\Theta_{11}(x)$.

Aus (72.) folgt

(88a.)

$$\frac{d\lg\Theta(x)}{dx} = \lim_{n',m'=\infty} \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{x-\frac{1}{4}(2m+1)\omega-\frac{1}{2}(2n+1)\omega'},$$

und aus (61b.) folgt

$$(88.)\quad \frac{d\lg\Theta(x)}{dx} = \frac{-8\pi}{\omega}\sum_0^\infty{}_{(n)} \frac{q^{2n+1}.\sin\frac{4\pi x}{\omega}}{1+2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}.$$

Aus (75.) folgt

$$(89^a.)\quad \frac{d\lg\Theta_{01}(x)}{dx} = \lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'-1}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{x-\frac{1}{2}m\omega-\frac{1}{2}(2n+1)\omega'},$$

oder aus (62b.)

$$(89.)\quad \frac{d\lg\Theta_{01}(x)}{dx} = \frac{8\pi}{\omega}\sum_0^\infty{}_{(n)} \frac{q^{2n+1}.\sin\frac{4\pi x}{\omega}}{1-2q^{2n+1}.\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}.$$

Aus (76.) und (63b.) folgen die Gleichungen

$$(90^a.)\quad \frac{d\lg\Theta_{10}(x)}{dx} = \lim \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'-1}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{x-\frac{1}{4}(2m+1)\omega-n\omega'},$$

$$(90.)\quad \frac{d \lg \Theta_{1\,0}(x)}{dx} = \frac{-2\pi}{\omega} \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\omega} - \frac{8\pi}{\omega} \sum_1^\infty {}_{(n)} \frac{q^{2n} . \sin \frac{4\pi x}{\omega}}{1 + 2q^{2n} \cos \frac{4\pi x}{\omega} + q^{4n}}.$$

Aus (77.) endlich und (64b.) folgen die Gleichungen

$$(91^a.)\quad \frac{d \lg \Theta_{1\,1}(x)}{dx} = \lim \sum_{-n'}^{n'} {}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'} {}_{(m)} \frac{1}{x - \frac{1}{2} m\omega - n\omega'},$$

$$(91.)\quad \frac{d \lg \Theta_{1\,1}(x)}{dx} = \frac{2\pi}{\omega} \operatorname{cotg} \frac{2\pi x}{\omega} + \frac{8\pi}{\omega} \sum_1^\infty {}_{(n)} \frac{q^{2n} . \sin \frac{4\pi x}{\omega}}{1 - 2q^{2n} \cos \frac{4\pi x}{\omega} + q^{4n}}.$$

Setzen wir in der Gleichung (90a.) $\omega' = i\infty$, also $q = 0$, so folgt

$$(92.)\quad \frac{-2\pi}{\omega} \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\omega} = \lim \sum_{-m'}^{m'} {}_{(m)} \frac{1}{x - \frac{1}{4}(2m+1)\omega}$$

$$= 2x \sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{1}{x^2 - \frac{1}{16}(2m+1)\omega^2}.$$

Setzen wir in der Gleichung (91a.) $\omega' = i\infty$, so folgt

$$(93.)\quad \frac{2\pi}{\omega} \operatorname{cotg} \frac{2\pi x}{\omega} = \lim \sum_{-m'}^{m'} {}_{(m)} \frac{1}{x - \frac{1}{2} m\omega},$$

welche Formeln im Folgenden von Nutzen sind.

Mit denselben Mitteln als die reciproken Werthe der ϑ-Functionen lassen sich Quotienten zweier ϑ-Functionen in Partialbrüche entwickeln. Die Function $\lambda(x)$ ist ungerade und sie wird für $x = x_{m,n} = \frac{1}{2} m\omega + \frac{1}{4}(2n+1)\omega'$ unendlich gross erster Ordnung. Das Integral

$$\int_s \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = \int_s \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{\xi} + x \int_s \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{\xi(\xi - x)}$$

convergirt gegen Null, wenn s die ganze Begrenzung eines geradlinigen Parallelogrammes ist, dessen Ecken $\frac{1}{2}m'\omega + \frac{1}{4}\omega + n'\omega'$, $-\frac{1}{2}m'\omega - \frac{1}{4}\omega + n'\omega'$, $-\frac{1}{2}m'\omega - \frac{1}{4}\omega - n'\omega'$, $\frac{1}{2}m'\omega + \frac{1}{4}\omega - n'\omega'$ sind, wenn m', n' über alle Grenzen gross genommen werden. Denn da $\lambda(\xi)$ auf diesen Linien nirgend unendlich wird, so convergirt das letzte Integral mit zunehmenden m', n' gegen Null, weil die zu integrirende Function unendlich klein zweiter Ordnung wird. Das Integral $\int_s \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{\xi}$ ist genau gleich Null,

weil zu jedem Elemente $\frac{\lambda(\xi)\,d\xi}{\xi}$ auf s ein Element $\frac{\lambda(-\xi).d(-\xi)}{-\xi}$ $= -\frac{\lambda(\xi)\,d\xi}{\xi}$ auf s zugesellt werden kann, welche sich zusammen aufheben. Da nun weiter

$$\lim_{x=x_{m,n}} \lambda(x)(x-x_{m,n}) = \lim_{x'=0} x'.\lambda[x'+\tfrac{1}{2}\omega'+\tfrac{1}{2}m\omega+n\omega']$$

$$= (-1)^m \lim_{x'=0} x'.\lambda(x'+\tfrac{1}{2}\omega') = (-1)^m \lim \frac{x'}{k\lambda(x')}{}^{*)} = \frac{(-1)^m}{k}$$

ist, so fliesst aus Satz XXIII. die Gleichung

$$(94^a)\quad \lambda(x) = \lim_{m',n'=\infty} \frac{1}{k} \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{(-1)^m}{x-\frac{1}{2}m\omega-\frac{1}{2}(2n+1)\omega'},$$

und mit Hilfe der Gleichung (80.) hieraus

$$(94.)\quad \lambda(x) = \frac{2\pi}{\omega k} \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \frac{1}{\sin\frac{2\pi x-(2n+1)\pi\omega'}{\omega}}$$

$$= \frac{8\pi}{k\omega}\sin\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi\omega'}{\omega}}{\cos\frac{2(2n+1)\pi\omega'}{\omega}-\cos\frac{4\pi x}{\omega}}$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{q}}{k\omega}\sin\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{q^n(1+q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1}.\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}.$$

Ganz ähnlich lassen sich die ungeraden Functionen $\mu(x-\frac{1}{4}\omega)$ und $\nu(x+\frac{1}{2}\omega')$ behandeln, und zwar erhält man so die Gleichungen

(95.)

$$\mu(x-\tfrac{1}{4}\omega) = \frac{1}{ki}.\lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{(-1)^{m+n}}{x-\frac{1}{4}(2m+1)\omega-\frac{1}{2}(2n+1)\omega'},$$

$$(96.)\quad \nu(x+\tfrac{1}{2}\omega') = -i\lim \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{(-1)^n}{x-\frac{1}{2}m\omega-n\omega'}.$$

Ersetzt man in (95.) $x-\frac{1}{4}\omega$, so folgt

$$(97^a.)\quad \mu(x) = -\lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'-1}^{m'}{}_{(m)} \frac{(-1)^{m+n}}{x-\frac{1}{2}m\omega-\frac{1}{2}(2n+1)\omega'},$$

und hieraus mit Hilfe von (80.)

---

*) $\lambda(x+\frac{1}{2}\omega) = \frac{\Theta_{1\,1}(x+\frac{1}{2}\omega')}{\Theta_{0\,1}(x+\frac{1}{2}\omega')\sqrt{k}} = \frac{\Theta_{0\,1}(x)}{\Theta_{1\,1}(x)\sqrt{k}} = \frac{1}{k} : \frac{\Theta_{1\,1}(x)}{\Theta_{0\,1}(x)\sqrt{k}} = \frac{1}{k\lambda(x)}.$

$$(97.)\quad \mu(x) = -\frac{2\pi i}{k\omega}\lim\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)}\frac{(-1)^n}{\sin\frac{2\pi x-(2n+1)\pi\omega'}{\omega}}$$

$$= \frac{8\pi}{ik\omega}\cos\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi\omega'}{\omega}}{\cos\frac{2(2n+1)\pi\omega'}{\omega}-\cos\frac{4\pi x}{\omega}}$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{q}}{\omega . k}\cos\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n q^n(1-q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1}.\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}.$$

Ersetzt man in (96.) $x+\frac{1}{2}\omega'$ durch x, so folgt

$$(98^a.)\quad \nu(x) = i\lim\sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)}\sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)}\frac{(-1)^n}{x-\frac{1}{2}m\omega-\frac{1}{2}(2n+1)\omega'}$$

und mit Hilfe der Formel (93.) folgt hieraus

$$(98.)\quad \nu(x) = \frac{2\pi}{i\omega}\lim\sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)}(-1)^n\text{cotg}\frac{2\pi x-(2n+1)\pi\omega'}{\omega}.$$

In dieser Formel convergirt das allgemeine Glied mit wachsendem n gegen $\pm i$. Setzt man darin $x=0$, so ist

$$\nu(0) = 1 = \frac{2\pi i}{\omega}\lim\sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)}(-1)^n\text{cotg}\frac{(2n+1)\pi\omega'}{\omega},$$

und ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung (98.) ab, so erhalten wir

$$(99^a.)\quad 1-\nu(x) = \frac{2\pi i}{\omega}\sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)}\frac{(-1)^n.\sin\frac{2\pi x}{\omega}}{\sin\frac{(2n+1)\pi\omega'}{\omega}.\sin\frac{2\pi x-(2n+1)\pi\omega'}{\omega}},$$

worin das unendlich ferne Glied gegen 0 convergirt, so dass man eine endliche Anzahl fortlassen kann. Zieht man nun das Glied $-n-1$ und n zusammen, so folgt hieraus mit Fortlassung eines einzelnen unendlich fernen Gliedes

$$(99^b.)\quad 1-\nu(x) = \frac{8\pi i}{\omega}\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n\text{cotg}\frac{(2n+1)\pi\omega}{\omega}}{\cos\frac{2(2n+1)\pi\omega'}{\omega}-\cos\frac{4\pi x}{\omega}},$$

und hieraus endlich die Jacobi'sche Formel

(99.)

$$1-\nu(x) = \frac{16\pi}{\omega}\sin^2\frac{2\pi x}{\omega}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n q^{2n+1}.\frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}}{1-2q^{2n+1}.\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}.$$

Es lassen sich nun zwar von den vier ϑ-Functionen je zwei noch auf andere Weise zu einem Quotienten zusammensetzen, und diese in Partialbruchreihen entwickeln, allein wir begnügen uns mit den hier aufgestellten, welche die wichtigsten sind.

Art. 10. Darstellungen durch die Fourier'sche Reihe.

Um die Function $\lg \Theta_{01}(x)$ in trigonometrische Reihen zu entwickeln, bedienen wir uns der Formel (62b.) und erhalten aus ihr

$$\lg \Theta_{01}(x) = \lg \Theta_{01} - 2 \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1 - q^{2n-1}) + \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \lg \left(1 - 2q^{2n+1} . \cos \frac{4\pi x}{\omega} + q^{2(2n+1)}\right)$$

$$= \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1 - q^{2n}) + \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} [\lg (1 - q^{2n+1} e^{\frac{4i\pi x}{\omega}}) + \lg (1 - q^{2n+1} e^{\frac{-4\pi i x}{\omega}})]$$

und wenn man nach aufsteigenden Potenzen von $e^{\frac{4i\pi}{\omega}}$ und $e^{\frac{-4i\pi x}{\omega}}$ entwickelt, was für alle reelle Werthe von $\frac{x}{\omega}$ möglich ist,

$$\lg \Theta_{01}(x) = \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1 - q^{2n}) - 2 \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{(2n+1)m} . \cos \frac{4m\pi x}{\omega}}{m}.$$

Da für alle Werthe von $\frac{x}{\omega}$ diese Reihen unbedingt convergent sind, so können wir die Reihenfolge der beiden Summationen umkehren und die Summation über n ausführen, so erhalten wir

$$(100.) \quad \lg \Theta_{01}(x) = \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1 - q^{2n}) - 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{m} . \cos \frac{4m\pi x}{\omega}}{m(1 - q^{2m})},$$

und wenn wir x um $\frac{1}{4}\omega$ vermehren, erhalten wir

$$(101.) \quad \lg \Theta(x) = \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1 - q^{2n}) - 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^{m} . q^{m} . \cos \frac{4m\pi x}{\omega}}{m(1 - q^{2m})},$$

und wenn wir die Formeln differenziren

$$(102.)\quad \frac{d\lg\Theta_{0\,1}(x)}{dx} = \frac{8\pi}{\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m\sin\frac{4m\pi x}{\omega}}{1-q^{2m}} = Z(x),$$

$$(103.)\quad \frac{d\lg\Theta(x)}{dx} = \frac{8\pi}{\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m\sin\frac{4m\pi x}{\omega}}{1-q^{2m}}.$$

Mit denselben Mitteln finden wir

$$(104.)\quad \lg\Theta_{1\,0}(x) = \lg[2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2m})] + \lg\cos\frac{2\pi x}{\omega} - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{2m}.\cos\frac{4m\pi x}{\omega}}{m(1-q^{2m})},$$

$$(105.)\quad \lg\Theta_{1\,1}(x) = \lg\sqrt[4]{q}\,\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(1-q^{2m-1})^2}{1-q^{2n}} + \lg\sin\frac{2\pi x}{\omega} - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^{2m}\cos\frac{4m\pi x}{\omega}}{m(1-q^{2m})}$$

und hieraus durch Differenziren

(106.)

$$\frac{d\lg\Theta_{1\,0}(x)}{dx} = -\frac{2\pi}{\omega}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\omega} + \frac{8\pi}{\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{2m}\sin\frac{4m\pi x}{\omega}}{1-q^{2m}},$$

$$(107.)\quad \frac{d\lg\Theta_{1\,1}(x)}{dx} = \frac{2\pi}{\omega}\operatorname{cotg}\frac{2\pi x}{\omega} + \frac{8\pi}{\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^{2m}\sin\frac{4m\pi x}{\omega}}{1-q^{2m}}.$$

Zieht man die Gleichung (100.) von der (105.) ab, so erhält man

$$(108.)\quad \lg\lambda(x) = \lg\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}.\sin\frac{2\pi x}{\omega}\right) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m\cos\frac{4m\pi x}{\omega}}{m(1+q^m)}.$$

Die Grössen $\lg\sin\frac{2\pi x}{\omega}$, $\lg\cos\frac{2\pi x}{\omega}$ lassen sich auch noch in trigonometrische Reihen entwickeln, wodurch die Darstellung von $\lg\Theta_{1\,0}(x)$ und $\lg\Theta_{1\,1}(x)$ erst vollständig wird, diese Entwickelung hat jedoch für uns kein besonderes Interesse.

Die elliptischen Functionen und die reciproken Werthe der Θ-Functionen lassen sich dadurch in trigonometrische Reihen entwickeln, dass man jedes einzelne Glied ihrer Darstellungen durch Partialbrüche durch die Fourier'sche Reihe

darstellt. Setzen wir für das allgemeine Glied der Partialbruchreihe den Werth, welchen uns die Gleichung liefert,

$$\frac{\sin\frac{2\pi x}{\omega}\cdot q^n(1+q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2n+1)}}=\frac{q^n}{2i}\left(\frac{e^{\frac{2\pi xi}{\omega}}}{1-q^{2n+1}e^{\frac{4\pi xi}{\omega}}}-\frac{e^{\frac{-2\pi xi}{\omega}}}{1-q^{2n+1}e^{\frac{-4\pi xi}{\omega}}}\right)$$

$$=\sum_{(m)}{}_0^\infty q^{2nm+m+n}.\sin\frac{2(2m+1)\pi x}{\omega},$$

in die Gleichung (94.) ein, so erhalten wir

$$\lambda(x)=\frac{8\pi\sqrt{q}}{\omega k}\cdot\sum_{(n)}{}_0^\infty\sum_{(m)}{}_0^\infty q^{2nm+m+n}.\sin\frac{2(2m+1)\pi x}{\omega}.$$

In dieser Reihe, welche unbedingt convergent ist, so lange $\frac{x}{\omega}$ reell ist, können wir die Reihenfolge der Summationen umkehren, und über n die Summe ausführen. Da $\sum_{(n)}{}_0^\infty q^m.q^{(2m+1)n}$ $=\frac{q^m}{1-q^{2m+1}}$ ist, so folgt

$$(109.)\quad \lambda(x)=\frac{8\pi\sqrt{q}}{\omega k}\sum_{(m)}{}_0^\infty\frac{q^m.\sin\frac{2(2m+1)\pi x}{\omega}}{1-q^{2m+1}},$$

und ähnlich

$$(110.)\quad \mu(x)=\frac{8\pi\sqrt{q}}{\omega k}\sum_{(m)}{}_0^\infty\frac{q^m.\cos\frac{2(2m+1)x}{\omega}}{1+q^{2m+1}},$$

$$(111.)\quad \nu(x)=\frac{2\pi}{\omega}\left(1+4\sum_{(m)}{}_1^\infty\frac{q^m.\cos\frac{4m\pi x}{\omega}}{1+q^{2m}}\right).$$

Setzt man in das allgemeine Glied der Partialbruchreihe (87.) den Werth ein, welchen die Gleichung liefert

$$\frac{1-q^{2(2m+1)}}{1-2q^{2m+1}\cos\frac{4\pi x}{\omega}+q^{2(2m+1)}}$$

$$=-1+\frac{1}{1-q^{2m+1}e^{\frac{4\pi xi}{\omega}}}+\frac{1}{1-q^{2m+1}e^{\frac{-4\pi xi}{\omega}}}$$

$$=1+2\sum_{(n)}{}_1^\infty q^{(2m+1)n}.\cos\frac{4\pi xn}{\omega},$$

so findet man

$$(112.)\quad \sqrt{\frac{\omega^3 k k'}{(2\pi)^3.4\sqrt{q}}}\cdot\frac{1}{\Theta_{0\,1}(x)} =$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2+m}\left(1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} q^{(2m+1)n}\cos\frac{4\pi n x}{\omega}\right),$$

und wenn wir x um $\frac{1}{4}\omega$ vermehren

$$(113.)\quad \sqrt{\frac{\omega^3 k k'}{(2\pi)^3 4\sqrt{q}}}\cdot\frac{1}{\Theta(x)} =$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2+m}\left(1+2\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^n q^{(2m+1)n}\cos\frac{4\pi n x}{\omega}\right).$$

So lange der Werth von $\frac{x}{\omega}$ reell ist, sind diese Reihen unbedingt convergent, und man kann die Reihenfolge der Summationen vertauschen, wodurch sie in Fourier'sche Reihen verwandelt werden. Die Summation der Coefficienten ist jedoch nicht so einfach durchzuführen, man kann sie aber nach XVIII leicht durch bestimmte Integrale darstellen.

Art. 11. Die lineare Transformation der ϑ-Functionen.

Eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der ϑ-Functionen ist die, dass zur Darstellung einer und derselben Function unendlich viele verschiedene Moduln gewählt werden können. Setzt man nämlich

$$(a.)\quad A = i\pi\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\quad w = \frac{v i\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\quad a = i\pi\frac{-\delta A+\beta i\pi}{\gamma A-\alpha i\pi},$$

$$a\gamma+\delta i\pi = \frac{-(i\pi)^2}{A\gamma-\alpha i\pi},\quad v = \frac{-i\pi w}{A\gamma-\alpha i\pi}$$

und

$$(b.)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1,$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$(c.)\quad \vartheta_{h\,g}(v, a) = \text{Const.}\; e^{\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}}.\vartheta_{h'\,g'}(w, A),$$

worin

$$(d.)\quad h' = -g\gamma+h\delta+\gamma\delta,\quad g' = g\alpha-h\beta+\alpha\beta$$

ist. Vermehrt man nämlich v um $\lambda i\pi$, so vermehrt sich w um $-\lambda(A\gamma-\alpha i\pi)$ und die rechte Seite der Gleichung (c.), von dem constanten Factor abgesehen, erhält die Form

$$e^{\frac{[w-\lambda(A\gamma-\alpha i\pi)]^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}}.\vartheta_{h',g'}[w-\lambda(A\gamma-\alpha i\pi),\ A]$$

$$(-1)^{\alpha\lambda h'+\lambda\gamma g'}.e^{\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}-2\lambda\gamma w+\lambda^2\gamma(A\gamma-\alpha i\pi)-\lambda^2\gamma^2 A+2\lambda\gamma w}.\vartheta_{h'g'}(w,\ A)$$

$$=(-1)^{\lambda\,[h(\alpha\delta-\beta\gamma)+\alpha\gamma(\beta+\delta+\lambda)]}.e^{\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}}.\vartheta_{h'g'}(w,\ A).$$

Da nun $\alpha\delta-\beta\gamma$ gleich Eins, und $\alpha\gamma(\beta+\delta+\lambda)$ für ungerade λ [wegen (b.)] stets gerade ist, so ist

$$(-1)^{\lambda\,[h(\alpha\delta-\beta\gamma)+\alpha\gamma(\beta+\delta+\lambda)]}=(-1)^{\lambda h}$$

und es genügt die rechte Seite von (c.) der Functionalgleichung (1.). Vermehrt man aber v um $\varkappa a$, so vermehrt sich w um

$$\frac{\varkappa i\pi a}{a\gamma+\delta i\pi}=\varkappa i\pi\left(\delta\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi}-\beta\frac{a\gamma+\delta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\right)=\varkappa\delta A-\beta\varkappa i\pi$$

und $\vartheta_{h'g'}(w,A)$ gewinnt den Factor $(-1)^{\beta\varkappa h'+\delta g'\varkappa}.e^{-\varkappa^2\delta^2 A-2\varkappa\delta w}$, $\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}$ geht über in

$$\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}+\frac{2\varkappa(\delta A-\beta i\pi)\gamma w}{A\gamma-\alpha i\pi}+\frac{\varkappa^2\gamma(\delta A-\beta i\pi)^2}{A\gamma-\alpha i\pi}$$

$$=\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}+2\varkappa\delta w+\frac{2\varkappa i\pi w}{A\gamma-\alpha i\pi}+\varkappa^2\gamma\frac{(A^2\delta-\beta i\pi)^2}{A\gamma-\alpha i\pi}$$

und demnach gewinnt die rechte Seite von (c) den Factor

$$e^{-2\varkappa v+\varkappa^2\left(\gamma\frac{(A\delta-\beta i\pi)^2}{A\gamma-\alpha i\pi}-\delta^2 A\right)+i\pi\varkappa(\beta h'+\delta g')}=(-1)^{\varkappa g}.e^{-2\varkappa v-\varkappa^2 a},$$

so dass sie der Functionalgleichung (2.) Genüge leistet und sich daher von der rechten Seite nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann, w. z. b. w.

Die Abhängigkeit des noch unbestimmt gelassenen constanten Factors von a kann leicht angegeben werden. Wenden wir nämlich die partielle Differentialgleichung (3.) auf die rechte Seite der Gleichung (c.) an, welche ihr genügen muss, so erhalten wir

$$2\frac{d\,\text{Const.}}{da}=\frac{-\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}.\text{Const.}$$

oder

(e.) $d\lg\text{Const.}=-\frac{1}{2}d\lg a\gamma+\delta i\pi$, $\text{Const.}=D_{hg}\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}$,

worin nun D_{hg} von a unabhängig ist, und $-\pi$ der Bequemlichkeit halber unter das Wurzelzeichen gesetzt ist. Für $\gamma=1$ nämlich, und $\alpha=0$, $\delta=0$, in welchem Falle (wegen b.) $\beta=-1$

sein muss und $h' = g$, $g' = h$ ist, erhalten wir $A = -\pi$, wenn wir $a = -\pi$ setzen, und folglich

$$\vartheta_{hg}(v, -\pi) = D_{hg} . \sqrt{1} . e^{\frac{v^2}{\pi}} . \vartheta_{gh}(-vi, -\pi).$$

Setzen wir darin $v = \frac{1}{2}h\pi - \frac{1}{2}gi\pi$, so haben wir

$$\vartheta(0, -\pi)\, e^{-\frac{1}{2}hgi\pi - \frac{1}{4}h^2\pi + \frac{1}{2}h^2\pi - \frac{1}{2}ghi\pi}$$

$$= D\sqrt{1} . \vartheta(0, -\pi)\, e^{-\frac{1}{2}hgi\pi - \frac{1}{4}g^2\pi - \frac{1}{2}ghi\pi - \frac{1}{2}g^2\pi + \pi(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}gi)^2 + g^2\pi},$$

woraus folgt

$$\text{(f.)} \qquad D_{hg} = e^{\frac{1}{2}hgi\pi},$$

wenn das Wurzelzeichen von $\sqrt{1}$ positiv genommen wird. Demnach ist

$$\text{(114.)} \quad \vartheta_{hg}(v, a) = \sqrt{\frac{-\pi}{a}} . e^{\frac{-v^2}{a} + \frac{1}{2}hgi\pi} . \vartheta_{gh}\left(\frac{vi\pi}{a}, \frac{\pi^2}{a}\right).$$

Da a eine Grösse ist, deren reeller Theil stets negativ genommen werden muss, so dass der Winkel φ der Zahl $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, so it $\sqrt{\frac{-\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}}(\sin\frac{1}{2}\varphi - i\cos\frac{1}{2}\varphi)$ eine Grösse, deren reeller Theil stets positiv ist, weil $\frac{1}{2}\varphi$ immer im ersten oder zweiten Quadranten liegt. *Demnach ist in* (114.) *das Wurzelzeichen stets so zu wählen, dass der reelle Theil des Wurzelwerthes positiv ist.* Die Auswerthung der Grösse D für beliebige α, β, γ, δ wird im nächsten Artikel erfolgen, so dass wir als vorläufiges Resultat die Gleichung gefunden haben

(115.)

$$\vartheta_{hg}(v, a) = D_{hg} . \sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma + \delta i\pi}} . e^{\frac{-v^2\gamma}{a\gamma + \delta i\pi}} . \vartheta_{h'g'}\left(\frac{vi\pi}{a\gamma + \delta i\pi}, i\pi\frac{a\alpha + \beta i\pi}{a\gamma + \delta i\pi}\right),$$

$$h' = h\delta - g\gamma + \gamma\delta, \quad g' = -h\beta + g\alpha + \alpha\beta.$$

Ist a reell, so dient die Gleichung (114.) dazu, ϑ-Functionen mit rein imaginärem Argument in solche mit reellem zu verwandeln.

Wendet man auf eine transformirte ϑ-Function noch eine Transformation α', β', γ', δ' an, so erhält die neue Function den Modul

$$i\pi\frac{\alpha' A + \beta' i\pi}{\gamma' A + \delta' i\pi} = i\pi\frac{a(\alpha\alpha' + \beta\gamma') + i\pi(\beta\alpha' + \delta\beta')}{a(\alpha\gamma' + \gamma\delta') + i\pi(\beta\gamma' + \delta\delta')}$$

und das Argument

$$\frac{wi\pi}{A\gamma'+\delta'i\pi} = \frac{vi\pi}{a(\alpha\gamma'+\gamma\delta')+i\pi(\beta\gamma'+\delta\delta')}$$

und man kann daher diese successiven Transformationen durch die eine

$$\text{(g.)}\quad \alpha'' = \alpha\alpha'+\beta\gamma',\quad \beta'' = \beta\alpha'+\delta\beta',$$
$$\gamma'' = \alpha\gamma'+\gamma\delta',\quad \delta'' = \beta\gamma'+\delta\delta'$$

ersetzen.

Wir zeigen nun noch, dass die Transformation einer ϑ-Function mit dem Modul a in eine solche mit dem Modul $A = i\pi\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi}$ benutzt werden kann, um schwach convergente ϑ-Reihen in stärker convergente zu verwandeln. Diese Reihen convergiren nämlich um so rascher, je grösser der absolute Betrag des reellen Theiles des Moduls ist. Ist nun $a = -p\pi+q\pi i$, so kann vorausgesetzt werden, dass q in den Grenzen liege $-\frac{1}{2} \leqq q \leqq \frac{1}{2}$, weil durch die Transformation $\alpha = \delta = 1$, $\gamma = 0$, β beliebig, wenn β passend gewählt wird, q sofort in jene Grenzen eingeschlossen werden kann. Nun ist aber

$$A = i\pi\frac{-p\alpha+(q\alpha+\beta)i}{-p\gamma+(q\gamma+\delta)i}$$
$$= -\pi\frac{p(\alpha\delta-\beta\gamma)}{p^2\gamma^2+(q\gamma+\delta)^2}+i\pi\frac{(p^2+q^2)\alpha\gamma+q(\alpha\gamma+\beta\delta)+\beta\delta}{p^2\gamma^2+(q\gamma+\delta)^2},$$

woraus sich zunächst ergiebt, *dass eine Transformation, in welcher $\alpha\delta-\beta\gamma$ nicht 1, sondern -1 wäre, nicht möglich ist, weil in diesem Falle der reelle Theil von A positiv würde, und daher die ϑ-Reihen nicht convergiren könnten.* Ist $\alpha\delta-\beta\gamma = n$, so nennt man die Transformation eine Transformation vom $n$ten Grade.

Nun ist aber offenbar der reelle Theil von A; also $\frac{-p\pi}{p^2\gamma^2+(q\gamma+\delta)^2}$ seinem absoluten Betrage nach dann grösser als der absolute Betrag des reellen Theiles von a, also von $-p\pi$, wenn $p^2\gamma^2+(q\gamma+\delta)^2 < 1$ ist. Für $\gamma = 0$ ist [wegen (b.)] $\delta = \pm 1$ und also $p^2\gamma^2+(q\gamma+\delta)^2 = 1$. Für $\delta = 0$ ist $\gamma = \pm 1$ und $p^2\gamma^2+(q\gamma+\delta)^2 = p^2+q^2$, also, da q^2 höchstens gleich $\frac{1}{4}$ ist, kleiner als 1, wenn $p^2 < \frac{3}{4}$, oder der reelle Theil von a seinem absoluten Betrage nach kleiner als $\pi\sqrt{\frac{3}{4}}$ ist. Hieraus folgt der Jacobi'sche Satz:

(116.) *So lange der absolute Betrag des reellen Theiles des Moduls a einer ϑ-Function unter $\pi\sqrt{\frac{3}{4}}$ liegt, lässt sich stets eine lineare Transformation finden, durch welche ein Modul eingeführt wird, dessen reeller Theil seinem alsoluten Betrage nach den von a übersteigt, so dass die ϑ-Reihe mit dem transformirten Modul rascher convergirt, als die mit dem Modul a.*

Art. 12. Grenzwerthe der ϑ-Functionen für rein imaginäre Moduln. Bestimmung der Transformationsconstanten D.

Die Gleichung (114.) kann benutzt werden, um zu erfahren, wie sich, für $v = 0$, die ϑ-Functionen verhalten, wenn a rein imaginär ist, wenigstens für rationale Multipla von $i\pi$. Zunächst erhalten wir aus (114.), wenn a der Null so genähert wird, dass der reelle Theil immer negativ ist,

$$\lim_{a=0} \sqrt{\frac{a}{-\pi}} \cdot e^{\frac{-g^2\pi^2}{4a}} \cdot \vartheta_{h\,g}(0, a) = \lim_{a=0} e^{\frac{1}{2}hgi\pi - \frac{g^2\pi^2}{4a}} \cdot \vartheta_{g\,h}\left(0, \frac{\pi^2}{a}\right),$$

welche Gleichung für $h = 1$, $g = 1$ die Identität $0 = 0$ liefert, aber sonst die Gleichungen

$$(117.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{a=0} \sqrt{\dfrac{a}{-\pi}} \cdot \vartheta(0, a) = \lim\limits_{a=0} \sqrt{\dfrac{a}{-\pi}} \cdot \vartheta_{1\,0}(0, a) = 1, \\ \lim\limits_{a=0} \sqrt{\dfrac{a}{-\pi}}\, e^{\frac{-\pi^2}{4a}} \cdot \vartheta_{0\,1}(0, a) = 2. \end{cases}$$

Hierin kann statt $v = 0$ für v eine Grösse gesetzt werden, welche mit a verschwindet.

Wir beschränken nun unsere Untersuchungen auf den Fall $h = 0$, $g = 0$. Setzen wir dann, n als positiv vorausgesetzt, $a = b \pm \frac{i\pi}{2n}$, so liefert die Gleichung (114.) die folgende

$$\vartheta\left(0, b \pm \frac{i\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{-\pi}{b \pm \frac{i\pi}{2n}}} \cdot \vartheta\left(0, \frac{\pi^2}{b \pm \frac{i\pi}{2n}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-2n\pi}{2nb \pm i\pi}} \cdot \vartheta\left(0, \frac{4n^2b\pi^2 \mp 2ni\pi^3}{4n^2b^2 + \pi^2}\right).$$

Wenn hierin b gegen 0 strebt, so nähert sich der Modul der letzten ϑ-Function der 0, abgesehen von einem ganzen Multiplum von $2\pi i$. Da nun aber eine ϑ-Function als Function ihres Moduls nach pag. 88 die Periode $2\pi i$ hat, so können wir beim

Grenzübergange in der letzten ϑ-Function den imaginären Theil des Moduls ganz fortlassen, so dass wir haben

$$\lim_{b=0}\sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\ b\pm\frac{i\pi}{2n}\right) =$$

$$\sqrt{\pm 2ni}\,\lim_{b=0}\sqrt{\frac{4n^2b\pi^2}{-\pi(4n^2b^2+\pi^2)}}\cdot\vartheta\left(0,\ \frac{4n^2b\pi^2}{4n^2b^2+\pi^2}\right)\sqrt{\frac{4n^2b^2+\pi^2}{4n^2\pi^2}}\ ,$$

und hieraus finden wir mit Hilfe der Gleichung (117.)

$$(118.)\qquad \lim_{b=0}\sqrt{\frac{b}{-\pi}}\cdot\vartheta\left(0,\ b\pm\frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{1\pm i}{2\sqrt{n}}\,,$$

worin sich die Vorzeichen $\pm$ auf beiden Seiten entsprechen, und *worin die Wurzel positiv zu nehmen ist.*

Setzen wir $a = b\pm\frac{i\pi}{2n+1}$, so liefert die Gleich. (114.)

$$\vartheta\left(0,\ b\pm\frac{i\pi}{2n+1}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{-(2n+1)\pi}{(2n+1)b\pm\pi i}}\,\vartheta\left(0,\ \frac{(2n+1)^2b\pi^2\mp(2n+1)i\pi^3}{(2n+1)^2b^2+\pi^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-(2n+1)\pi}{(2n+1)b\pm i\pi}}\cdot\vartheta_{01}\left(0,\ \frac{(2n+1)^2b\pi^2\mp(2n+1)i\pi^3}{(2n+1)^2b^2+\pi^2}-i\pi\right),$$

(nach pag. 88). Hier nähert sich der Modul mit b, abgesehen von einem ganzen Multiplum von $2\pi i$, der 0, wir können daher beim Grenzübergange den imaginären Theil ganz fortlassen (ebenfalls nach pag. 88), und erhalten sonach

$$\lim_{b=0}\sqrt{\frac{-b}{\pi}}\cdot e^{\frac{-\pi^2}{4(2n+1)^2b}}\cdot\vartheta\left(0,\ b\pm\frac{i\pi}{2n+1}\right) =$$

$$\sqrt{i\pm(2n+1)}\,\lim_{b=0}\sqrt{\frac{(2n+1)^2b\pi^2}{-\pi[(2n+1)^2b^2+\pi^2]}}\cdot e^{-\frac{\pi^2+(2n+1)^2b^2}{4(2n+1)^2b^2}}\times$$

$$\vartheta_{01}\left(0,\ \frac{(2n+1)^2b\pi^2}{(2n+1)^2b^2+\pi^2}\right)\sqrt{\frac{(2n+1)^2b^2+\pi^2}{(2n+1)^2\pi^2}}$$

und hieraus nach (117.)

$$(119.)\quad \lim_{b=0}\sqrt{\frac{-b}{\pi}}\cdot e^{\frac{-\pi^2}{4(2n+1)^2b}}\cdot\vartheta\left(0,\ b\pm\frac{i\pi}{2n+1}\right) = \frac{1\pm i}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{2},$$

worin sich die Vorzeichen $\pm$ auf beiden Seiten entsprechen, und die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Ordnen wir die Reihe $\vartheta(v) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} e^{am^2+2mv}$ so an, dass wir die Glieder, welche um μ Stellen auseinanderstehen, für sich summiren, so finden wir

$$\vartheta(v, a) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \left\{ \begin{array}{l} e^{a(m\mu)^2+2(m\mu)v} + e^{a(m\mu+1)^2+2(m\mu+1)v} + \dots \\ \qquad \dots + e^{a(\mu m+\mu-1)^2+2(m\mu+\mu-1)v} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\mu-1}{}_{(r)} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} e^{a\mu^2 m^2 + 2m(\mu ra+\mu v)+2rv+r^2 a},$$

oder

$$(120.)\quad \vartheta(v, a) = \sum_{r=0}^{r=\mu-1}{}_{(r)} e^{2rv+r^2a}.\vartheta[\mu(v+ra),\ a\mu^2].$$

Wenden wir nun diese Gleichung auf die Function $\vartheta\left(0,\ b+\frac{m}{n}i\pi\right)$ an, indem wir $2n$ für μ wählen, und m als relative Primzahl zu n voraussetzen, so erhalten wir

$$\vartheta\left(0,\ b+\frac{mi\pi}{n}\right) = \sum_{r=0}^{r=2n-1}{}_{(r)} e^{r^2\left(b+\frac{mi\pi}{n}\right)}.\vartheta(2nbr,\ 4bn^2)$$

$$= \sum_{r=0}^{r=2n-1}{}_{(r)} \sqrt{\frac{-\pi}{4bn^2}}\, e^{\frac{r^2 mi\pi}{n}}.\vartheta\left(\frac{i\pi b}{2n},\ \frac{\pi^2}{4n^2 b}\right),$$

worin wir auf jedes einzelne Glied der Summe die Gleichung (114.) angewendet haben. Multipliciren wir diese Gleichung mit $\sqrt{\frac{b}{-\pi}}$ und gehen mit b zur Grenze 0 über, so erhalten wir

$$(121.)\quad \lim_{b=0} \sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\ b+\frac{mi\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{0}^{2n-1}{}_{(r)} e^{r^2 m\frac{2\pi i}{2n}}$$

$$= \frac{\varphi(m, 2n)}{2n}$$

nach der Gauss'schen Bezeichnung dieser Summe. Für $m = \pm 1$ folgt aus den Gleichungen (118.) und (119.)

$$(122^{a}.)\quad \begin{cases} \varphi(\pm 1,\ 2n) = (1\pm i)\sqrt{n}, & n\equiv 0(2), \\ \varphi(\pm 1,\ 2n) = 0, & n\equiv 1(2), \end{cases}$$

worin das Wurzelzeichen positiv zu nehmen ist.

Mit Hilfe des bekannten Satzes*) $\varphi(hm, n).\varphi(hn, m) = \varphi(h, mn)$ folgt hieraus für ungerade n leicht die Gleichung

$$(122^{b}.)\quad \varphi(1, n) = \frac{1+i}{1+i^n}.\sqrt{n} = i^{\frac{1}{4}(n-1)^2}.\sqrt{n}.$$

Ist m gerade und n ungerade, so kann man (120.) wieder anwenden, indem man n für μ setzt, wodurch man die Gleichung erhält

$$\vartheta\left(0,\, b+\frac{mi\pi}{n}\right) = \sum_0^{n-1}{}_{(r)}\, e^{r^2\left(b+\frac{mi\pi}{n}\right)}.\vartheta(nbr,\, bn^2)$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_{(r)} \sqrt{\frac{-\pi}{bn^2}}\, e^{r^2\frac{mi\pi}{n}}.\vartheta\left(\frac{i\pi b}{n},\, \frac{\pi^2}{bn^2}\right)$$

und hieraus

$$(123.)\quad \lim_{b=0} \sqrt{\frac{b}{-\pi}}.\vartheta\left(0,\, b+\frac{mi\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_{(r)}\, e^{r^2\frac{mi\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\varphi(\tfrac{1}{2}m,\, n).$$

Betrachtet man nun die Gaussischen Summen $\varphi(p, q)$, worin p und q relative Primzahlen sind, als bekannte Grössen, was um so mehr gestattet ist, als ihre Auswerthung nur niedere zahlentheoretische Mittel erfordert, nachdem die Gleichungen (122^{a}.) (122^{b}.) gefunden sind, so ist das Verhalten der Function $\vartheta(0, a)$ für solche a, welche gegen ein rationales Multiplum von $i\pi$ streben, durch die Gleichungen (121.) und (123.) bestimmt. Wir bemerken nur fürs Folgende, dass $\varphi(p, q)$ nur dann verschwindet, wenn gleichzeitig $p \equiv 1\ (2)$, $q \equiv 2\ (4)$ ist.

Mit Hilfe der gewonnenen Resultate ist es leicht die Constante D_{hg}, die im vorigen Artikel noch unbestimmt gelassen war, auszuwerthen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $h=0$, $g=0$, (in welchem wir die Indices an D fortlassen,) weil der allgemeine aus diesem durch blosse Abänderung des Argumentes und Multiplication mit einer Exponentiellen erhalten wird, und nehmen noch die Fälle $\gamma = 0$ oder $\alpha = 0$ vorauf.

Für $\gamma = 0$ ist $A = a + \lambda i\pi$ und wir haben nach dem pag. 88 Bemerkten

$$(124.)\quad \vartheta_{hg}(v, a) = e^{\frac{1}{4}(2h-3h^2)\lambda i\pi}.\vartheta_{h,\, g+(1-h)\lambda}(v,\, a+\lambda i\pi).$$

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie herausgegeben von Dedekind, pag. 325.

Hieraus erhalten wir den Fall $\alpha = 0$, wenn wir auf die rechte Seite die Gleichung (114.) anwenden. Es ergiebt sich

$$(125.)\quad \vartheta_{h\,g}(v, a) =$$

$$\sqrt{\frac{-\pi}{a+\lambda i\pi}}\, e^{\frac{-v^2}{a+\lambda i\pi}+(\frac{1}{2}hg+\frac{1}{4}h^2\lambda+h\lambda)i\pi} . \vartheta_{g+(1-h)\lambda,\, h}\left(\frac{vi\pi}{a+\lambda i\pi}, \frac{\pi^2}{a+\lambda i\pi}\right).$$

Im allgemeinen Falle sei $h = g = 0$, also $h' = \gamma\delta$, $g' = \alpha\beta$, und γ und α seien von 0 verschieden. Setzen wir dann

$$a = b - i\pi\frac{\delta}{\gamma},\quad A = i\pi\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\pi^2}{b}\cdot\frac{1}{\gamma^2},\quad a\gamma+\delta i\pi = b\gamma,$$

und setzen γ als positiv voraus, was immer geschehen kann, weil sich die Transformation nicht ändert, wenn man allen vier Zahlen α, β, γ, δ das entgegengesetzte Zeichen giebt, so folgt aus der Transformationsgleichung (115.)

$$(\text{h.})\quad \vartheta(v, a) = D\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}\, . e^{\frac{-v^2\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}} . \vartheta_{\gamma\delta,\, \alpha\beta}\left(\frac{vi\pi}{a\gamma+\delta i\pi}, A\right),$$

worin der reelle Theil der Wurzel positiv genommen werden soll, und hieraus für $v = 0$

$$(\text{i.})\quad \vartheta\left(0, b - i\pi\frac{\delta}{\gamma}\right) = D\sqrt{\frac{-\pi}{b\gamma}} . \vartheta_{\gamma\delta,\, \alpha\beta}\left(0, \frac{\pi^2}{b\gamma^2}+\frac{\alpha i\pi}{\gamma}\right).$$

Ist nun

γ gerade, δ ungerade,

(wegen (b.) sind γ und δ relative Primzahlen,) so folgt aus (121.) wenn wir die Gleichung (i.) mit $\sqrt{\frac{b}{-\pi}}$ multipliciren und mit b zur Grenze 0 übergehen

$$\frac{1}{2\gamma}\varphi(-\delta, 2\gamma) = D\sqrt{\frac{1}{\gamma}} . e^{-\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta i\pi},$$

$$(126.)\quad D = \tfrac{1}{2}i^{\alpha\beta\gamma\delta} . \sqrt{\frac{1}{\gamma}} . \varphi(-\delta, 2\gamma).$$

Ist

γ ungerade, δ gerade,

so folgt aus (123.)

$$\frac{1}{\gamma}\varphi(-\tfrac{1}{2}\delta, \gamma) = D\sqrt{\frac{1}{\gamma}} . e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma\delta i\pi},$$

$$(127.)\quad D = i^{\alpha\beta\gamma\delta} . \sqrt{\frac{1}{\gamma}} . \varphi(-\tfrac{1}{2}\delta, \gamma),$$

worin überall die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Sind aber γ *und* δ *beide ungerade*, so kann man auf die Gleichung (115.) die Transformation (114.) anwenden, wodurch ihre rechte Seite die Form erhält

$$D.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}.\sqrt{\frac{-\pi}{A}}.e^{\frac{-v^2\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}-\frac{1}{A}\left(\frac{vi\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\right)^2+\frac{1}{2}h'g'i\pi}\times$$

$$\vartheta_{h'g'}\left(\frac{vi\pi}{a\gamma+\delta i\pi}.\frac{i\pi}{A},\ \frac{\pi^2}{A}\right)$$

und für $v=0$ die Form

$$D.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}.\sqrt{\frac{-\pi(a\gamma+\delta i\pi)}{(a\alpha+\beta i\pi)i\pi}}e^{h'g'i\pi}.\vartheta_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left(0,\ -i\pi\frac{a\gamma+\delta i\pi}{a\alpha+\beta i\pi}\right)$$

setzt man $a=b-\frac{\beta}{\alpha}i\pi$, $\frac{\pi^2}{A}=-i\pi\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\pi^2}{b\alpha^2}$ und setzt man α als positiv voraus, so folgt

$$\text{(k.)}\quad \sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\ b-i\pi\frac{\beta}{\alpha}\right)=$$

$$D\sqrt{\frac{-\pi\alpha}{b\alpha\gamma+i\pi}}.\sqrt{\frac{-\pi(\alpha\gamma b+i\pi)}{\alpha^2 b\, i\pi}}\sqrt{\frac{b}{-\pi}}.\vartheta_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left(0,\ \frac{-\pi\gamma}{\alpha}+\frac{\pi^2}{b\alpha^2}\right),$$

geht man darin mit b zur Grenze 0 über, so folgt, wenn

α gerade, β ungerade

ist, aus (121.)

$$\frac{1}{2\alpha}\varphi(-\beta,\ 2\alpha)=\frac{D.i^{-\alpha\beta\gamma\delta}.(1+i)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\alpha}},$$

$$\text{(128.)}\quad D=\frac{i^{\alpha\beta\gamma\delta}.\varphi(-\beta,\ 2\alpha)}{\sqrt{2}.\sqrt{\alpha}.(1+i)},$$

aber wenn

α ungerade, β gerade ist,

aus (123.)

$$\frac{1}{\alpha}\varphi(-\tfrac{1}{2}\beta,\ \alpha)=\frac{i^{-\alpha\beta\gamma\delta}.D(1+i)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}.\sqrt{2}},$$

$$\text{(129.)}\quad D=\frac{i^{\alpha\beta\gamma\delta}.\sqrt{2}.\varphi(-\tfrac{1}{2}\beta,\ \alpha)}{(1+i)\sqrt{\alpha}},$$

womit nun D in allen Fällen bestimmt ist.

Vermehren wir nun in der Gleichung (h.) v um $\frac{1}{2}ha+\frac{1}{2}gi\pi$ und multipliciren mit $e^{hv-\frac{1}{4}hgi\pi}$, so geht sie über in

$$\text{(l.)}\quad \vartheta_{hg}(v,a)=D.e^{\chi i\pi}.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}.e^{\frac{w^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}}\vartheta_{h'g'}(w,A),$$

$$\chi=\tfrac{1}{2}h\beta\delta(\alpha-2\gamma)-\tfrac{1}{2}g\alpha\beta(\beta-2\delta)-\tfrac{1}{2}\beta\gamma hg-\tfrac{1}{4}\alpha\gamma g^2-\tfrac{1}{4}\beta\delta h^2,$$

woraus sich ergiebt, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung (115.) vergleicht:

$$(130.)\qquad D_{hg} = D.e^{\chi i\pi}.$$

Art. 13. Lineare Transformation der elliptischen Functionen.

Die Formeln, welche wir durch die lineare Transformation der ϑ-Functionen erhalten haben, setzen uns in den Stand, ein und dieselbe Function $\lambda(x)$ oder $\lambda(x, k)$ (durch welche Bezeichnung wir den Modul andeuten) auf unendlich viele Arten als Quotienten zweier ϑ-Functionen darzustellen. Da nämlich

$$\vartheta_{hg}\left(\frac{vi\pi}{a\gamma+\delta i\pi}, i\pi\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\right) = \vartheta_{hg}\left(\frac{i\pi x}{\gamma\omega'+\frac{1}{2}\delta\omega}, 2\pi i\frac{\omega'}{\omega}\right)$$

ist, oder wenn wir $\omega'\alpha+\frac{1}{2}\omega\beta = \Omega'$, $\omega'\gamma+\frac{1}{2}\omega\delta = \frac{1}{2}\Omega$ und $2\pi i\frac{\Omega'}{\Omega} = A$ setzen (woraus $\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\Omega\alpha-\Omega'\gamma$, $\omega' = \Omega'\delta-\frac{1}{2}\Omega\beta$ folgt), gleich

$$\vartheta_{hg}\left(\frac{2\pi ix}{\Omega}, 2\pi i\frac{\Omega'}{\Omega}\right) = \Theta_{hg}(x, A),$$

so folgt aus (115.)

$$\Theta_{hg}(x, a) = D_{hg}.\sqrt{\frac{\omega i}{2\omega'\gamma+\omega\delta}}.e^{-\frac{2\pi i x^2\gamma}{\omega(\omega'\gamma+\frac{1}{2}\omega\delta)}}.\Theta_{h'g'}(x, A).$$

Hieraus ergiebt sich für $\lambda(x, k)$ der Ausdruck

$$(131.)\qquad \lambda(x, k) = \frac{\Theta_{11}(x, a)}{\Theta_{01}(x, a)}.\frac{\Theta(0, a)}{\Theta_{10}(0, a)} =$$

$$e^{-\frac{1}{2}\beta\gamma i\pi}.\frac{\Theta_{\delta-\gamma+\gamma\delta,\ \alpha-\beta+\alpha\beta}(x, A)}{\Theta_{\gamma\delta-\gamma,\ \alpha+\alpha\beta}(x, A)}.\frac{\Theta_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(0, A)}{\Theta_{\delta+\gamma\delta,\ \alpha\beta-\beta}(0, A)}.$$

Dies sind unendlich viel verschiedene Ausdrücke für die Function λ, welche der Differentialgleichung $dx = \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-k^2\lambda^2}}$ genügt.

Da nun aber die Function

$$\varDelta(x) = \frac{\Theta_{11}(x, A)}{\Theta_{01}(x, A)\sqrt{k_1}},\quad \text{worin}\quad k_1 = \frac{\Theta^2_{10}(0, A)}{\Theta^2(0, A)}$$

gesetzt ist, nach Art. 4 der Differentialgleichung

$$dx = \frac{d\varDelta}{\varDelta'(0)\sqrt{(1-\varDelta^2)(1-k_1{}^2\varDelta^2)}}$$

Genüge leistet, so ist $\varDelta(x) = \lambda(\varrho x, k_1)$, wenn $\varrho = \varDelta'(0)$

gesetzt wird, und es ergiebt sich mittels der Gleichung (115.) ein einfacher Zusammenhang zwischen $\lambda(\varrho x, k_1)$ und $\lambda(x, k)$.

Ist nun

$$\alpha\beta \equiv \gamma\delta \equiv \alpha\beta - \beta \equiv 0, \quad \gamma\delta + \delta \equiv 1 \mod 2,$$

so müssen α und δ ungerade, β und γ gerade sein, und man findet aus (151.), wenn man die Indices auf 0, 1 reducirt, was mittels der Formel

$$\text{(a.)} \quad \vartheta_{h+2m,\, g+2n}(v, a) = (-1)^{nh}.\vartheta_{h\,g}(v, a)$$

geschieht,

$$\text{(152.)} \quad \lambda(x, k) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}.\frac{\Theta_{1\,1}(x, A)}{\Theta_{0\,1}(x, A)}.\frac{\Theta(0, A)}{\Theta_{1\,0}(0, A)}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}\lambda(\varrho x, k_1).$$

Ist α von der Form $4n+1$, so ist nach (b.) pag. 129 δ ebenfalls von der Form $4n+1$, und es unterscheidet sich $\lambda(\varrho x, k_1)$ von $\lambda(x, k)$ nur dadurch, dass Ω, Ω' an die Stelle von ω, ω' getreten sind. Nun ist $\frac{\partial\lambda(\varrho x, k_1)}{\partial x}_{(x=0)} = \frac{\partial\lambda(x, k)}{\partial x}_{(x=0)} = 1$, folglich auch $\varrho = 1$. Für $x = \frac{1}{4}\Omega + \frac{1}{2}\Omega'$ aber findet man $k_1 = 1 : \lambda[\frac{1}{4}\omega + \frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{2}(\delta - 1 + \beta)\omega + \frac{1}{2}\omega'(\alpha + \gamma - 1)] = (-1)^{\frac{1}{2}\beta}k$. Da aber in der Definition von $\lambda(x)$ als Umkehrung eines elliptischen Integrales nur k^2 vorkommt, also $\lambda(x, k) = \lambda(x, -k)$ ist, so gelangt man zu dem Satze:

(153.) *Will man das Integral* $x = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda)(1-k^2\lambda^2)}}$ *mittels der Gleichung*

$$\lambda(x) = \frac{\vartheta_{1\,1}\left(\frac{2\pi i x}{\Omega}, 2\pi i\frac{\Omega'}{\Omega}\right)}{\vartheta_{0\,1}\left(\frac{2\pi i x}{\Omega}, 2\pi i\frac{\Omega'}{\Omega}\right)}.\frac{\vartheta\left(0, 2\pi i\frac{\Omega'}{\Omega}\right)}{\vartheta_{1\,0}\left(0, 2\pi i\frac{\Omega'}{\Omega}\right)}$$

umkehren und sind ω, ω' *durch die auf kürzestem Wege genommenen Integrale*

$$\tfrac{1}{2}\omega = 2\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}, \quad \tfrac{1}{2}\omega' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}$$

bestimmt, so kann man für Ω, Ω' *die Grössen*

$$\tfrac{1}{2}\Omega = \tfrac{1}{2}\omega\gamma + \omega'\delta, \quad \Omega' = \tfrac{1}{2}\omega\alpha + \omega'\beta$$

wählen, wenn

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha = 4n+1, \quad \delta = 4n'+1, \quad \beta = 2m, \quad \gamma = 2m'$$

ist.

Ist α von der Form $4n+3$ und sind β, γ gerade, so ist der Differentialquotient von $\lambda(\varrho x, k_1)$ in (153.) gleich -1, und folglich $\varrho = -1$, für $x = \frac{1}{4}\Omega + \frac{1}{2}\Omega'$ findet sich $k_1 = \pm k$ und folglich

$$\lambda(x, k) = -\lambda(-x, \pm k).$$

Ist ferner $\gamma\delta - \gamma \equiv 0$, $\alpha + \beta\alpha \equiv 1$, $\gamma \equiv 1$, mod 2, so ist β gerade. Dann liefert die Gleichung (151.) die Gleichung

$$(154.)\quad \lambda(x, k) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)} \cdot \frac{\Theta_{1\,1}(x, A)}{\Theta_{0\,1}(x, A)} \cdot \frac{\Theta_{1\,0}(0, A)}{\Theta(0, A)}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)} . k_1 . \lambda(\varrho x, k_1).$$

Da für $x = 0$. $\dfrac{\partial\lambda(\varrho x, k_1)}{\partial x} = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)}}{k_1}$ ist, und sich für $x = \frac{1}{4}\Omega$, $k_1 = \pm\dfrac{1}{k}$ ergiebt, so erhält man

$$k . \lambda(x, k) = \pm\lambda\left(\pm xk, \frac{1}{k}\right),$$

worin sich die Vorzeichen entsprechen.

Ist $\quad \gamma\delta - \gamma \equiv 1, \quad \alpha + \alpha\beta \equiv 0, \quad \text{mod } 2,$
so gelangt man zu der Transformation

$$(155.)\quad i . \lambda(x, k) = \pm\frac{\lambda(\pm ix, k')}{\mu(ix, k')},$$

und ist $\quad \gamma\delta - \gamma \equiv 0, \quad \alpha + \alpha\beta \equiv 0, \quad \text{mod } 2,$
so erhält man die Transformation

$$(156.)\quad ik' . \lambda(x, k) = \pm\frac{\lambda\left(\pm ixk', \frac{1}{k'}\right)}{\nu\left(ixk', \frac{1}{k'}\right)},$$

worin sich die Vorzeichen entsprechen.

Die beiden Transformationen (155.), (156.), welche uns für reelle k in den Stand setzen, eine elliptische Function mit rein imaginärem Argument durch elliptische Functionen mit reellem Argument auszudrücken, gehören nicht zu den linearen, wenn die Jacobi'sche canonische Form für ein elliptisches Integral erster Gattung zu Grunde gelegt wird, wohl aber, wenn dafür die Riemann'sche $x = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}}$ genommen wird.

Um zu allen linearen Transformationen der elliptischen Functionen zu gelangen, wenn die Jacobi'sche canonische Form zu Grunde gelegt wird, kann man durch die Substitution

$$\lambda = -\frac{a+b\lambda_1}{c+d\lambda_1}$$

den Ausdruck

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda)^2.(1-k^2\lambda^2)}} \text{ in } \frac{d\lambda_1}{\varrho\sqrt{(1-\lambda_1{}^2)(1-k_1{}^2\lambda_1{}^2)}}$$

transformiren, und untersuchen, wie hierzu die Constanten a, b, c, d bestimmt werden müssen. Man gelangt so zu den Transformationsgleichungen:

$$(157.)\quad \lambda(x,\,k) = \pm\lambda(\pm x,\,k) = \frac{\pm 1}{k\lambda[\pm(x+\tfrac{1}{2}\omega'),\,k]},$$

$$(158.)\quad \lambda(x,\,k) = \pm\frac{1}{k}\lambda\left(\pm xk,\,\frac{1}{k}\right) = \frac{\pm 1}{\lambda\left(\pm k(x+\tfrac{1}{2}\omega'),\,\frac{1}{k}\right)},$$

(159.)

$$\begin{cases} \lambda(x-\tfrac{1}{4}\omega-\tfrac{1}{4}\omega',\,k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\lambda(\varrho x,\,k_1).(1-\sqrt{k})-(1+\sqrt{k})}{\lambda(\varrho x,\,k_1).(1-\sqrt{k})+(1+\sqrt{k})}, \\ \lambda(x+\tfrac{1}{4}\omega+\tfrac{1}{4}\omega',\,k) = -\dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\lambda(\varrho x,\,k_1)(1-\sqrt{k})+(1+\sqrt{k})}{\lambda(\varrho x,\,k_1)(1-\sqrt{k})-(1+\sqrt{k})}, \end{cases}$$

worin $\varrho = \frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2$, $k_1 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2$ ist;

$$(160.)\begin{cases} \lambda(x+\tfrac{1}{4}\omega',\,k) = \dfrac{1}{i\sqrt{k}}\,\dfrac{\lambda(\varrho x,\,k_1)(1-i\sqrt{k})-(1+i\sqrt{k})}{\lambda(\varrho x,\,k_1)(1-i\sqrt{k})+(1+i\sqrt{k})}, \\ \lambda(x-\tfrac{1}{4}\omega',\,k) = -\dfrac{1}{i\sqrt{k}}\,\dfrac{\lambda(\varrho x,\,k_1)(1-i\sqrt{k})+(1+i\sqrt{k})}{\lambda(\varrho x,\,k_1)(1-i\sqrt{k})-(1+i\sqrt{k})}, \end{cases}$$

worin $\varrho = \frac{1}{2}i(1+i\sqrt{k})^2$, $k_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2$.

Aus den beiden letzten Formeln werden noch vier neue Transformationen erhalten, wenn man $\sqrt{k}$ das negative Zeichen giebt.

Hiermit haben wir zugleich die Beziehung gefunden, welche zwischen den verschiedenen Moduln stattfindet, welche man erhält, wenn man die Function $\sqrt{A\lambda^4+B\lambda^3+C\lambda^2+B\lambda+F}$ durch eine lineare Substitution auf die canonische Form bringt. (Conf. pagg. 78. 79.) Ist nämlich einer unter ihnen k, so giebt es im Ganzen sechs verschiedene, nämlich

$$(161.)\quad k,\ \frac{1}{k},\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2,\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2,$$

wobei natürlich jedem noch das negative Vorzeichen gegeben werden kann, was aber für die elliptischen Functionen keine Bedeutung hat.

Art. 14. Die verallgemeinerte binomische Reihe.

Eine hervorragende Rolle spielen die ϑ-Functionen in einer gewissen Gattung von Differenzengleichungen, nämlich solcher, in welchen
$\Delta\varphi(x) = \varphi(qx) - \varphi(x)$, $\Delta^n\varphi(x) = \Delta^{n-1}\varphi(qx) - \Delta^{n-1}\varphi(x)$
ist. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit linearen Coefficienten, welche (im Allgemeinen) auf die Form

$$\text{(a.)}\quad (1-x)\,\Delta\varphi(x) + x(q^\alpha - 1)\,\varphi(x) = 0$$

gebracht werden kann, und deren Lösung die verallgemeinerte binomische Reihe ist, durch welche die Mittel, die ϑ-Functionen darzustellen, noch vermehrt werden.

Integriren wir nämlich die Gleichung (a.) mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten, indem wir die nach um eine Einheit steigenden oder fallenden Potenzen geordnete Reihe $\Sigma a_n x^n$ in die Gleichung (a.) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung

$$\text{(b.)}\quad \Sigma a_n[(1-x)x^n(q^n-1) + x^{n+1}(q^\alpha-1)] =$$
$$\Sigma a_n[x^n(q^n-1) + x^{n+1}(q^\alpha - q^n)] = 0.$$

Im Falle die Reihe aufsteigt, wird jeder Coefficient a_{n+1} mit dem vorhergehenden a_n durch die Gleichung

$$\text{(c.)}\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^\alpha - q^n}{1 - q^{n+1}}$$

in eine Beziehung gesetzt, abgesehen vom niedrigsten. Der Coefficient der niedrigsten Potenz in (b.) muss demnach für sich verschwinden, was nur noch durch passende Bestimmung des Exponenten der niedrigsten Potenz erreicht werden kann. Ist dieser Exponent μ, so hat man $a_\mu(q^\mu - 1) = 0$, also $\mu = 0$ zu setzen, wenn man von einem ganzen Multiplum von $\frac{2\pi i}{\lg q}$ absieht, welches nichts wesentlich Neues liefert. Denn lässt man die Entwicklung mit $x^{m\frac{2\pi i}{\lg q}}$ statt mit x^0 beginnen, so behält jedes Glied der Reihe, also ihre Summe den Factor $x^{m\frac{2\pi i}{\lg q}}$ d. h. eine Function, welche der Differenzengleichung

$$\text{(d.)}\quad \Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(qx) = \varphi(x)$$

Genüge leistet. Jede Lösung der Gleichung (a.) kann aber mit

einer (d.) genügenden Function, welche wir eine k-Function nennen wollen, multiplicirt werden, ohne dass sie aufhört, eine Lösung zu sein, weil die linke Seite der Differenzengleichung eine lineare homogene Function von $\varphi(x)$, $\varphi(qx)$ ist. Man kann aber umgekehrt behaupten, die Gleichung (a.) besitzt nur ein **einziges Integral** (Lösung), welches mit einer willkürlichen k-Function als Factor versehen werden kann. Sind nämlich $\psi(x)$ und $\chi(x)$ zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (a.), welcher man die Form

$$\text{(e.)} \qquad \varphi(qx) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x}\,\varphi(x)$$

geben kann, so setzen wir $\psi(x)$ und $\chi(x)$ in (e.) ein und bilden durch Division der beiden Gleichungen die neue

$$\frac{\psi(xq)}{\chi(xq)} = \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \text{ oder } \Delta\frac{\psi(x)}{\chi(x)} = 0.$$

Es ist also der Quotient eine k-Function, w. z. b. w.

Die Gleichung (c.) liefert nun für a_n den Werth

$$a_n = a_0\,\frac{q^\alpha-1}{1-q}\cdot\frac{q^\alpha-q}{1-q^2}\cdots\frac{q^\alpha-q^{n-1}}{1-q^n}$$

und es ergiebt sich als erste Lösung der Gleichung (a.), $a_0 = 1$ gesetzt, die Reihe

$$\text{(162.)} \quad p(\alpha, q, x) = 1+\frac{q^\alpha-1}{1-q}x+\frac{q^\alpha-1}{1-q}\cdot\frac{q^\alpha-q}{1-q^2}x^2+\ldots$$

welche für $q = 1$ in die binomische Reihe, deren Summe $(1-x)^\alpha$ ist, übergeht. Für die Bezeichnung $p(\alpha, q, x)$ kann auch $p(\alpha, x)$ gesetzt werden, wo es ohne Zweideutigkeit geschehen kann.

Integrirt man die Gleichung (a.) durch eine absteigende Reihe, so muss, damit (b.) erfüllt sei, für die höchste Potenz von x die α^{te} genommen werden und die Coefficienten müssen wieder der Relation (c.) genügen, woraus als zweites Integral der Gleichung (a.) die Reihe

(163.)

$$\pi(\alpha, q, x) = e^{\alpha i\pi}.x^\alpha.\sum_0^\infty{}_{(n)}\left(\frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right)^n.\frac{q^\alpha-1}{1-q}\cdot\frac{q^\alpha-q}{1-q^2}\cdots\frac{q^\alpha-q^{n-1}}{1-q^n},$$

in welcher für $n = 0$ der Term 1 zu setzen ist, und $e^{\alpha i\pi}$ als Factor gewählt ist, damit für $q = 1$ die Entwicklung mit der

von $(1-x)^\alpha = e^{-\alpha i\pi}x^\alpha\left(1-\frac{1}{x}\right)^\alpha$ nach absteigenden Potenzen von x übereinstimme, wenn auf dem positiven Ufer der reellen Achse, durch welche wir die x-Ebene gemäss XXV. begrenzt denken, die mehrdeutige Function $(1-x)^\alpha$ für $x=0$ den Werth 1, $\left(1-\frac{1}{x}\right)^\alpha$, für $x=\infty$ den Werth 1 und x^α, für $x=1$ den Werth 1 hat. Auch in der Bezeichnung $\pi(\alpha, q, x)$ kann das Element q fortgelassen werden, wenn keine Zweideutigkeit entsteht.

Man stellt die Functionen $p(\alpha, x)$ und $\pi(\alpha, x)$ leicht durch unendliche Produkte dar. Denn da nach (a.) $p(\alpha, qx) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x}p(\alpha, x)$, also

$$p(q^n x) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x}\cdot\frac{1-q^{\alpha+1}x}{1-qx}\cdots\frac{1-q^{\alpha+n-1}x}{1-q^{n-1}x}\cdot p(\alpha, x) \text{ ist,}$$

und da, wenn $n=\infty$ gesetzt wird und der absolute Betrag von q kleiner als 1 ist, $\lim p(q^n x)$ nach (162.) gleich 1, und da auch $\lim\limits_{n=\infty}(1-q^n x)^\alpha = 1$ ist, so ist

(164.)

$$p(\alpha, x) = \lim_{n=\infty}\frac{1-x}{1-q^\alpha x}\cdot\frac{1-qx}{1-q^{\alpha+1}x}\cdots\frac{1-q^{n-1}x}{1-q^{n+\alpha-1}x}\cdot(1-q^n x)^\alpha,$$

worin der Factor $(1-q^n x)^\alpha$ für norm $q<1$ fortgelassen werden kann. Will man aber die Function auch für andere Werthe von q brauchbar machen, so muss dieser Factor hinzugefügt werden. Aehnlich haben wir

$$\pi\left(\alpha, \frac{x}{q}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}q}{1-\frac{1}{x}q^{1-\alpha}},$$

$$\pi\left(\alpha, \frac{x}{q^n}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}q}{1-\frac{1}{x}q^{1-\alpha}}\cdot\frac{1-\frac{1}{x}q^2}{1-\frac{1}{x}q^{2-\alpha}}\cdots\frac{1-\frac{1}{x}q^n}{1-\frac{1}{x}q^{n-\alpha}}\pi(\alpha, x),$$

und aus (163.) folgt $\lim\limits_{n=\infty}\pi\left(\alpha, \frac{x}{q^n}\right) = e^{-\alpha i\pi}.x^\alpha$, so dass man erhält

$$(165.)\quad \pi(\alpha, x) =$$

$$\lim_{n=\infty} e^{-\alpha i\pi}.x^\alpha.\frac{1-\frac{1}{x}q^{1-\alpha}}{1-\frac{1}{x}q}\cdot\frac{1-\frac{1}{x}q^{2-\alpha}}{1-\frac{1}{x}q^2}\cdots\frac{1-\frac{1}{x}q^{n-\alpha}}{1-\frac{1}{x}q^n}\cdot\left(1-\frac{1}{x}q^n\right)^\alpha.$$

Geht man in (164.) mit α zur Grenze $+\infty$ über, so fliesst daraus eine Function

$$(166.)\quad w(x) = \prod_{0}^{\infty}{}_{(n)}(1-xq^n),$$

welche durch die Reihe, (die für $\alpha = +\infty$ aus (162.) erhalten wird,)

$$(167.)\quad w(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-x)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)},$$

worin für $n=0$ die Eins zu setzen ist, dargestellt werden kann. Daraus ergeben sich für $p(\alpha, x)$, $\pi(\alpha, x)$, welche Functionen bis jetzt nur für norm $(x) < 1$ resp. norm $\left(\frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right) < 1$ durch Reihen dargestellt sind, Darstellungen als Quotienten überall convergenter Reihen, nämlich

$$(168.)\quad p(\alpha, x) = \frac{w(x)}{w(xq^\alpha)} =$$

$$\left(\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-x)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}\right) : \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-xq^\alpha)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}\right),$$

$$(169.)\quad \pi(\alpha, x) = e^{-\alpha i\pi}.x^\alpha \frac{w\left(\frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right)}{w\left(\frac{1}{x}q\right)}$$

$$= e^{-\alpha i\pi}.x^\alpha \frac{\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{\left(\frac{-1}{xq^{\alpha-1}}\right)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}}{\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{\left(\frac{-q}{x}\right)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}},$$

wobei wir voraussetzen, dass norm $(q) < 1$ sei. Für norm $(q) > 1$ ergeben sich andre Entwicklungen, die sich in meiner Abhandlung über die Heine'sche Reihe, im Crelle'schen Journale Bd. 70 vorfinden. Auch sind dort, insoweit dies möglich ist, $p(\alpha, x)$ und $\pi(\alpha, x)$ durch Partialbruchreihen und Kettenbrüche dargestellt.

Für die Function $p(\alpha, q)$ ist von Herrn Heine die Bezeichnung $\Omega(\alpha)$ eingeführt worden. Ich habe, um an die Gaussische Π-Function zu erinnern,

$$p(\alpha, q) = (1-q)^\alpha \Pi(\alpha, q)$$

gesetzt, weil für $q = 1$

$$(170.)\quad \Pi(\alpha, q) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)^\alpha . \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}} . \frac{1-q^2}{1-q^{\alpha+2}} \dots \frac{1-q^n}{1-q^{\alpha+n}},$$

in die Gaussische Function

$$\Pi(\alpha) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{2}{\alpha+2}\cdot\frac{3}{\alpha+3}\cdots\frac{n}{\alpha+n}\cdot(n+1)^{\alpha}$$

übergeht. Sie besitzt, wie man leicht sieht, die Eigenschaft,

$$\text{(f.)}\quad \frac{1-q^{\alpha}}{1-q}\cdot\Pi(\alpha-1,\,q) = \Pi(\alpha,q),$$

welche die der Gaussischen Function $\alpha\,\Pi(\alpha-1) = \Pi(\alpha)$ für $q=1$ direct liefert.

Nun bezeichnen wir weiter mit

$$\text{(g.)}\quad \mathop{\mathsf{S}}_{x}^{xq^{n}} f(x)\,.\,\Delta\frac{\lg x}{\lg q} \quad\text{oder}\quad \mathop{\mathsf{S}}_{x}^{xq^{n}} f(x)\,.\,\frac{\Delta x}{x(q-1)}$$

die Summe $\sum_{0}^{n-1}{}_{(\mu)} f(xq^{\mu})$, und nennen diese Ausdrücke bestimmte Summen. Dann ist unter der Voraussetzung norm $(q^{\lambda+1}) < 1$, die zur Convergenz nöthig ist, die bestimmte Summe

$$\mathop{\mathsf{S}}_{1}^{q^{\infty}} s^{\lambda}.p(\mu,\,sq)\frac{\Delta s}{q-1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} q^{n(\lambda+1)}.p(\mu,\,q^{n+1})$$

$$= (1-q)^{\mu}\,\Pi(\mu,q)\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} q^{n(\lambda+1)}.\frac{1-q^{\mu+1}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{\mu+2}}{1-q^{2}}\cdots\frac{1-q^{\mu+n}}{1-q^{n}}$$

$$= (1-q)^{\mu}\,\Pi(\mu,q).p(-\mu-1,\,q^{\mu+\lambda+2}).$$

Die letzte p-Function kann als Produkt dargestellt werden, aus welcher Form man leicht die Gleichung

$$\text{(h.)}\quad p(-\mu-1,\,q^{\mu+\lambda+2}) = \frac{\Pi(\lambda,q)}{(1-q)^{\mu+1}.\Pi(\mu+\lambda+1,\,q)}$$

findet, so dass also

$$\text{(171.)}\quad \mathop{\mathsf{S}}_{1}^{q^{\infty}} s^{\lambda}.p(\mu,\,sq).\Delta s = -\frac{\Pi(\mu,q)\,\Pi(\lambda,q)}{\Pi(\mu+\lambda+1,\,q)}$$

sich ergiebt, woraus für $q = 1-\varepsilon$, wenn ε zu Null abnimmt, die bekannte Formel fliesst

$$\int_{0}^{1} s^{\lambda}.(1-s)^{\mu}\,ds = \frac{\Pi(\mu)\,\Pi(\lambda)}{\Pi(\mu+\lambda+1)}.$$

Die Gauss'schen Π-Functionen genügen bekanntlich der Gleichung

$$\frac{\sin\mu\pi}{\pi} = \frac{1}{\Pi(-\mu).\Pi(\mu-1)},$$

etwas ganz Aehnliches findet für die verallgemeinerten Π-Functionen statt. Bilden wir nämlich aus (170.) das Produkt

$$\frac{(1-q)q^{-\frac{1}{2}\mu}}{\Pi(-\mu,\, q)\Pi(\mu-1,\, q)} =$$

$$(q^{-\frac{1}{2}\mu}-q^{\frac{1}{2}\mu}) \lim_{n=\infty} \frac{1-(q^{\mu}+q^{-\mu})q+q^2}{(1-q^2)} \cdot \frac{1-(q^{\mu}+q^{-\mu})q^2+q^4}{(1-q^2)^2} \cdots$$

$$\cdots \frac{1-(q^{\mu}+q^{-\mu})q^n+q^{2n}}{(1-q^n)^2}\,.$$

so findet man durch Vergleichung derselben*) mit der Formel (64b.) die Relation

$$(172^a.)\quad \frac{1-q}{\Pi(-\mu,\, q)\Pi(\mu-1,\, q)} = -\frac{2\vartheta_{11}(\frac{1}{2}\mu \lg q,\, \frac{1}{2}\lg q)}{\vartheta'_{11}(0,\, \frac{1}{2}\lg q)} q^{\frac{1}{2}\mu},$$

woraus umgekehrt gefolgert wird, wenn man erst $\mu \lg q = 2v$ setzt und dann q durch q^2 ersetzt,

$$(172.)\quad \frac{\vartheta_{11}(v,\, a)}{\vartheta'_{11}(0,\, a)} . e^v = -2 \frac{1-q^2}{\Pi\left(-\frac{v}{\lg q},\, q^2\right)\Pi\left(\frac{v}{\lg q}-1,\, q^2\right)}$$

$$= -2 \frac{1}{p\left(-\frac{v}{\lg q},\, q^2,\, q^2\right) . p\left(\frac{v}{\lg q}-1,\, q^2,\, q^2\right)}.$$

Dieser letzte Ausdruck ist nun als Produkt zweier p-Functionen eine Quelle neuer Darstellungen der ϑ-Functionen. Die unendlichen Produkte sind zwar nicht neu, aber die Darstellungen (162.) und (168.).

Ebenso findet man die Gleichheit

$$(173.)\quad \frac{\vartheta_{11}(\frac{1}{2}\lg xq^{\alpha},\, \frac{1}{2}\lg q)}{\vartheta_{11}(\frac{1}{2}\lg x,\, \frac{1}{2}\lg q)} e^{\alpha[\lg(x\sqrt{q})-i\pi]} = \frac{\pi(\alpha,\, q,\, x)}{p(\alpha,\, q,\, x)},$$

durch welche die Darstellung von ϑ-Quotienten, worunter die elliptischen Functionen, vermehrt werden.

Ausführlicheres über die verallgemeinerte binomische Reihe findet man in einer Abhandlung Jacobi's im 32. Bande des Crelle'schen Journals, und in der Abhandlung des Herrn Heine über die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe im 34. Bde. pag. 285 des Journals und in meiner Abhandlung über diese Reihe im 70. Bde. pag. 258 des Journals.

---

*) Zu demselben Resultate kann man auch ohne vorhergehende Kenntniss der Produktentwickelungen der ϑ-Functionen mit Hilfe der Gleichungen (1.) und (2.) gelangen, indem man $\mu = \frac{v}{\lg q}$ setzt. Die Constante bestimmt man durch Specialisirung des Werthes von μ.

Art. 15. Die verschiedenen Darstellungen der constanten ϑ-Functionen.

Es soll nun hier noch eine Zusammenstellung der verschiedenen Darstellungen der in der Theorie der ϑ-Functionen vorkommenden wichtigsten Constanten gegeben werden. Aus den Gleichungen (53.), (65.), (66.), (67.), (68.) folgen die Relationen

(174.)

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} = 1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} q^{m^2} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1+q^{2m-1})^2(1-q^{2m});$$

(175.) $$\vartheta_{01} = \sqrt{\frac{\omega k'}{2\pi}} = 1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2}$$
$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1-q^{2m-1})^2 (1-q^{2m});$$

(176.) $$\vartheta_{10} = \sqrt{\frac{\omega k}{2\pi}} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} q^{m(m+1)}$$
$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-q^{4m}}{1-q^{2(2m-1)}};$$

(177.) $$i\vartheta'_{11} = \sqrt{\frac{k k'\omega^3}{(2\pi)^3}} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}(2m+1)(-1)^m q^{m(m+1)}$$
$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2m})^3.$$

Setzen wir in den Formeln (83.), (86.), (87.) x gleich Null, so folgt

(178.) $$\frac{\omega}{2\pi}\sqrt{k'} = 1+4\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m . q^{m(m+1)}}{1+q^{2m}} = 2\vartheta . \vartheta_{01},$$

(179.)

$$\frac{\omega}{2\pi}\sqrt{kk'} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m(m+1)} . (1-q^{2m+1})}{1+q^{2m+1}} = 2\vartheta_{01} . \vartheta_{10},$$

(180.)

$$\frac{\omega}{2\pi}\sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m . q^{m(m+1)}(1+q^{2m+1})}{1-q^{2m+1}}\text{*)} = 2\vartheta . \vartheta_{10}.$$

---

*) Die Formel 13 in Jacobi's Fundamenta nova pag. 187 ist demnach nicht richtig, denn setzt man dort $\sqrt{q}$ für q, wodurch kK in $2\sqrt{k} . K$ übergeht, so erhält man eine mit (180.) in Widerspruch stehende Formel.

Dividiren wir die Gleichungen (94.) und (109.) durch x und setzen dann $x = 0$, so erhalten wir

$$(181.)\quad \frac{k\omega^2}{16\pi^2} = \sqrt{q}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m.(1+q^{2m+1})}{(1-q^{2m+1})(1-q^{2m+1})}$$

$$= \sqrt{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(2m+1)\,q^m}{1-q^{2m+1}}.$$

Setzen wir in (97.) und (110.) $x = 0$, so erhalten wir

$$(182.)\quad \frac{\omega k}{8\pi} = \sqrt{q}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m+1}} = \sqrt{q}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m}{1+q^{2m+1}}.$$

Setzt man in (99.) $x = \frac{1}{4}\omega$ und in (111.) $x = 0$, so erhält man

$$(183.)\quad \frac{\omega(1-k')}{16\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{2m+1}}{1-q^{2(2m+1)}},$$

$$(184.)\quad \frac{\omega}{2\pi} = 1+4\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m}{1+q^{2m}} = 1+4\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^n q^{m(2n+1)}$$

und nach (174.) $= \vartheta^2 = (1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}q^{m^2})(1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}q^{n^2})$.

Multiplicirt man dies Produkt aus, so erhält man eine Potenzreihe, welche nach q fortschreitet, und deren Exponenten alle die Zahlen sind, welche als Summe zweier Quadrate darstellbar sind. Betrachten wir hiervon nur die ungeraden Zahlen und vergleichen die Reihe mit der Doppelsumme, welche ebenfalls eine Potenzreihe von q ist, und in welcher offenbar von den ungeraden Zahlen nur die von der Form $4n+1$ vorkommen, die von der Form $4n+3$ aber nicht, so erhält man den zahlentheoretischen Satz:

Jede Zahl von der Form $4n+1$ *ist als Summe zweier Quadrate darstellbar, jede Zahl von der Form* $4n+3$ *aber ist nicht darstellbar.*

Dividiren wir die Gleichung (99.) durch x^2 und setzen $x = 0$, so folgt

$$(185.)\quad \frac{k^2\omega^3}{32\pi^3} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m.q^{2m+1}.(1+q^{2m+1})}{(1-q^{2m+1})(1-q^{2m+1})}.$$

Differenzirt man (97.) und (110.) nach x und setzt nachher $x = \frac{1}{4}\omega$, so erhält man

$$(186.)\quad \frac{\omega^2 k k'}{16\pi^2} = \sqrt{q}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m(1-q^{2m+1})}{(1+q^{2m+1})^2}$$

$$= \sqrt{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m.q^m.(2m+1)}{1+q^{2m+1}}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich $\frac{1}{4}\vartheta_{01}^2.\vartheta_{10}^2$ und gehet daher in

$\frac{1}{4}\vartheta^2.\vartheta_{10}^2$ über, wenn man q in $-q$ (a in $a+i\pi$) verwandelt, so dass man die Gleichung (181.) durch diese Verwandlung erhält.

Setzt man in (94.) $x = \frac{1}{4}\omega'$, so erhält man

$$(187.)\quad \frac{\omega\sqrt{k}}{4\pi} = \sqrt{q}.(q^{-\frac{1}{4}}-q^{\frac{1}{4}})\sum_0^\infty{}_{(m)}\frac{q^m(1+q^{2m+1})}{1-q^{2m+1}(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})+q^{2(2m+1)}},$$

$$= (q^{-\frac{1}{4}}-q^{\frac{1}{4}}).\sum_0^\infty{}_{(m)}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}+q^{-\frac{2m+1}{2}}}{q^{\frac{2m+1}{2}}+q^{-\frac{2m+1}{2}}-(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})}.$$

Entwickelt man mit den früher angegebenen Mitteln $\frac{1}{\nu(x)}$ nach der Fourier'schen Reihe, so findet man

$$(188.)\quad \frac{1}{\nu(x)} = \frac{2\pi}{k'\omega}\left(1+4\sum_1^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m}{1+q^{2m}}\cos\frac{4m\pi x}{\omega}\right),$$

woraus für $x=0$ folgt

$$(189.)\quad \frac{\omega k'}{2\pi} = 1+4\sum_1^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m}{1+q^{2m}} = 2\vartheta_{01}.\vartheta_{01}.$$

Differenzirt man (108.) zweimal und setzt dann $x=\frac{1}{4}\omega$, so ergiebt sich

$$(190.)\quad \frac{k'^2\omega^2}{4\pi^2} = 1+8\sum_1^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m.m}{1+q^m} = \vartheta_{01}^4,$$

setzt man darin $-q$ an Stelle von q ($a+i\pi$ an Stelle von a), so ergiebt sich

$$(191.)\quad \frac{\omega^2}{4\pi^2} = 1+8\sum_1^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m.m.q^m}{1+q^m} = \vartheta^4 =$$

$$1+8\sum_0^{\infty\,(2)}{}_{(m,n)}(2m+1)\,q^{(2m+1)(n+1)}+8\sum_0^{\infty\,(2)}{}_{(m,n)}(-1)^n(2m+2)\,q^{(2m+2)(n+1)}$$

$$= \left(1+2\sum_0^\infty{}_{(m)}q^{m^2}\right)^4.$$

Ist nun p eine ungerade Zahl und $\varphi(p)$ die Summe ihrer Theiler, so kann man den vorletzten Ausdruck schreiben

$$1+8\Sigma\varphi(p)(q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+\ldots) = (1+2\sum_1^\infty{}_{(m)}q^2)^4.$$

In der Potenzreihe links kommen nun offenbar alle Zahlen als Exponenten vor, in der rechts aber, wenn man die Reihenmultiplication ausführt, diejenigen, welche als Summe von vier Quadraten darstellbar sind. Daraus folgert Jacobi den Fermat'schen zahlentheoretischen Satz:

Jede Zahl ist als Summe von vier Quadraten darstellbar.

Schreiben wir in (108.) $\frac{1}{4}\omega$ für x, so erhalten wir

$$(192.)\quad \lg k = \lg(4\sqrt{q})+4\sum_1^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m.q^m}{m(1+q^m)},$$

setzen wir in (108.) $\frac{1}{8}\omega$ für x, so erhalten wir

$$(193.)\quad \lg\frac{k}{1+k'} = \lg(2\sqrt{q}) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{2m}}{m(1+q^{2m})}$$

und setzen wir in (108.) $\frac{1}{4}\omega'$ für x, so erhalten wir

$$0 = \lg(1-\sqrt{q}) + \sqrt{q}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m(1+\frac{1}{q})}{m(1+q^m)}.$$

Entwickeln wir die Logarithmen der Produkte (65.), (66.), (67.) in Reihen, so erhalten wir

$$(194.)\quad \lg\frac{\omega}{2\pi} = 4\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^{2m+1}}{(2m+1)(1+q^{2m+1})},$$

$$\lg\frac{\omega k'}{2\pi} = -4\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^{2m+1}}{(2m+1)(1-q^{2m+1})},$$

$$\lg\frac{\omega k}{2\pi} = \lg(4\sqrt{q}) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^{2m}}{m(1+q^{2m})}.$$

Zieht man die beiden ersten dieser Gleichungen von einander ab, so folgt

$$(195.)\quad \lg k' = -8\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^{2m+1}}{(2m+1)(1-q^{2(2m+1)})}.$$

Dividiren wir die Gleichungen (102.), (103.), (106.) durch x und setzen dann $x = 0$, so erhalten wir

$$(196.)\quad \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}}\frac{\omega^2}{32\pi^2} = \frac{k.k'^2.\omega^2}{64\pi^3}\frac{d(\omega k')}{dk} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{m.q^m}{1-q^{2m}},$$

$$(197.)\quad \frac{kk'^2\omega^2}{64\pi^3}.\frac{d\omega}{dk} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m.q^m.m}{1-q^{2m}},$$

$$(198.)\quad \frac{kk'^2\, d(\omega k)}{64\pi^3.dk} = -\frac{1}{8} + \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{2m}.m}{1-q^{2m}}.$$

Aus der Darstellung elliptischer Functionen durch Produkte ergeben sich die Gleichungen:

$$(199.)\quad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}.\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right),$$

$$(200.)\quad \frac{\sqrt{k}\,\omega}{2\pi} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{1-q^{2m}}{1-q^{2m-1}}\right)^2.$$

Man sieht, wie mannigfaltig die Darstellungen der in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommenden Constanten sind. Von den Relationen, welche durch Vergleichung der verschiedenen Darstellungen erhalten werden, können viele auch mit den Mitteln bewiesen werden, mit welchen die verallgemeinerte binomische Reihe behandelt worden ist.

Halle, Druck von H. W. Schmidt.

